קורס הסתברות תרגול 2

חסם האיחוד[3]

יהיו $A_1,..A_n \subseteq \Omega$ מאורעות במרחב הסתברות (Ω, P), אזי $\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$

תרגיל: יהיו $A_1,...,A_n,B_1,..B_n \subseteq \Omega$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $A_i \subseteq B_i$.

הראו כי $P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(B_i) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

פתרון: נשים לב ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. מאחר ו- $A_i \subseteq B_i$ $\forall i$. לכן:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

לפי טענה שהוכחנו בתרגול הקודם: $A \subseteq B$: $P(B)-P(A)=P(B \setminus A)$

נוכיח ש- $(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \setminus A_i)$

~~למה זה נכון?~~ יהי $\omega \in (\bigcup B_i) \setminus (\bigcup A_i)$, אזי $\omega \in \bigcup B_i$ ו- $\omega \notin \bigcup A_i$

קיים $1 \leq j \leq n$ כך ש- $\omega \in B_j$ ובנוסף $\omega \notin A_k$ $\forall 1 \leq k \leq n$. לכן קיים $1 \leq j \leq n$ כך ש- $\omega \in B_j \setminus A_j$ לכן $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \setminus A_i)$

(למה הכיוון השני לא בהכרח נכון? אם $\omega \in B_2 \setminus A_2$ ו- $\omega \in A_1$ אז $\omega \in \bigcup (B_i \setminus A_i)$ אבל $\omega \notin (\bigcup B_i) \setminus (\bigcup A_i)$).

לכן: $P(\bigcup B_i) - P(\bigcup A_i) = P(\bigcup B_i \setminus \bigcup A_i) \underset{\text{טענה מהשיעור.}}{\leq} P(\bigcup (B_i \setminus A_i)) \underset{\text{חסם האיחוד}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} P(B_i \setminus A_i) = \sum (P(B_i) - P(A_i))$

ונשאר רק להפריד את הסכומים ◪

תרגיל 2: תהי $A_1, A_2, ...$ סדרה אינסופית של מאורעות ב- (Ω, P).

הוכיחו כי $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{N \to \infty} P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n)$

הדרכה: ננסה להביא את $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ להסתברות של איחוד של מאורעות זרים.

עבור את המאורעות הבאים: $B_1 = A_1$, $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$.

נשים לב שלכל $j \neq k$ $B_j \cap B_k = \emptyset$ ובנוסף $\forall N \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{i=1}^{N} B_i = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$

לכן $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \Leftarrow$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \overset{\text{זרים}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\bigcup_{n=1}^{i} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{i-1} A_n) =$$

מאחר ו- $\bigcup_{n=1}^{i-1} A_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{i} A_i$ נפריד בהפרש

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \left(P(\bigcup_{n=1}^{i} A_n) - P(\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n)\right) \underset{\text{טור טלסקופי}}{=} \lim_{N \to \infty} P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n)$$

◪

הבינום של ניוטון ונוסחאות הקומבינטוריקה:

תהי A קבוצה סופית עם n איברים $A=\{a_1,\dots,a_n\}$

* מס' הסידורים של הקבוצה: $n!$
* מס' הדרכים לבחור k איברים ללא החזרה ובלי חשיבות לסדר: $\binom{n}{k}$
* הבינום של ניוטון: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ ו- $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

תרגיל:

1. חשבו את הטור $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
2. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
3. הוכיחו ללא רישומים אלגבריים: $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

פתרון:

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$
2. $0^n=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k(-1)^k=\sum\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k+\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ אי זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=$

$=\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ אי זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}$

3. עשינו בהרצאה..

תרגיל: הוכיחו: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

פתרון: נניח שיש לנו n נשים ו-n גברים ואנו מעוניינים לבחור n מתוכם.

דרך א' - נבחר n מתוך 2n אנשים $\binom{2n}{n}$

דרך ב' - נבחר תחילה את הנשים עבור הקב', k נשים כאשר k הולך מ-0 עד n.

ואחר מכן נבחר n-k גברים: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\binom{n}{k}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ $\blacksquare$

מרחב הסתברות אחיד:

הגדרה: מרחב הסתברות נקרא אחיד אם לכל $\omega\in\Omega$ מתקיים: $P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}$

פרמוטציות/תמורות:

תהי A קבוצה כלשהי (סופית).

הגדרה: תמורה σ היא ~~פונקציה~~ העתקה חח"ע מ-A ל-A.

ודרך נוחה להציג את σ היא בעזרת מטריצה: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$

המשך: מבוא להסתברות תרגול II

הגדרה: בפרמוטציה σ קיים מעגל (מחזור) מאורך $1\le k\le n$ אם ישנו איבר $a\in A$ כך ש- $\sigma^k(a)=a$

הגדרה: נקודת שבת בפרמוטציה σ היא מעגל מאורך 1.

דוגמאות: נראה מס' דוגמאות למעגלים:

① $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ יש מעגל מאורך 2 ומעגל מאורך 1.

② $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$ אין מעגלים ← $(3\ 2\ 4\ 1)$

⚠ כאשר נסתכל על מעגל מאורך k נדרוש k איברים שונים.

תרגיל:

מה ההסתברות שבפרמוטציה σ שנבחרה באופן אחיד יש מעגל באורך n.

פתרון: ישנן $n!$ פרמוטציות כאשר בוחרים פרמוטציה באופן אחיד, הכוונה שבוחרים אחת מתוך ה- $n!$ באקראי. מרחב המדגם בבעיה:

$\Omega=\{\sigma : A\to A\}$ (פרמוטציה). $|\Omega|=n!$ נגדיר מאורע $A=\{\sigma :$ בה-σ יש מעגל באורך $n\}$

צריך למצוא $|A|=?$ $\qquad P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{|A|}{n!}$

A מייצג את כל ה-σ כך ש- $\sigma(1)=$ מס' כלשהו $=\alpha_1$

$\alpha_2=\sigma(\alpha_1)\in A\setminus\{1,\alpha_1\}$

$\sigma(\alpha_2)\in A\setminus\{1,\alpha_1,\alpha_2\}$

$1 \xrightarrow{n-1} \square \xrightarrow{n-2} \square \xrightarrow{n-3} \square \to$ אפשרויות

לכן $|A|=(n-1)!$ $\Leftarrow$

ומכאן נסיק ש- $P(A)=\frac{1}{n}$. דרך נוספת:

אם יש פרמוטציה σ כזאת אז ניתן להגדיר כהגדרה $(\underset{n-1 \text{ אפשרויות}}{2},\ \underset{n-2 \text{ אפשרויות}}{17},\ \dots\ 1)$

תרגיל: מה ההסתברות שבפרמוטציה מאורך $2n$ שנבחרה באופן אחיד יש בדיוק 2 מעגלים מאורך n כל אחד?

פתרון: נגדיר את המאורע המבוקש כ- B. $P(B)=?$

מרחב המדגם בבעיה הנו קבוצת כל הפרמוטציות מאורך $2n$ $\Leftarrow$ $|\Omega|=(2n)!$. $P(B)=\frac{|B|}{(2n)!}$

מס' האפשרויות לפרמוטציה מאורך $2n$ עם 2 מעגלים מאורך n $=|B|$

$|B|=$ מס' הדרכים לחלק את הקב' המקורית ל-2 קב' שוות גודל $\cdot$ מס' המעגלים האפשריים לקב' הראשונה $\cdot$ מס' המעגלים לקב' השנייה

$\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\qquad (n-1)!\qquad (n-1)!$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{\frac{1}{2}\binom{2n}{n}(n-1)!(n-1)!}{(2n)!}=\boxed{\frac{1}{2n^2}}$$