מבוא להסתברות תרגול 1

מתרגל: דודו, dudulagziel@gmail.com

שעות קבלה: יום א' - 13^{00}
יום ב' - 16^{30}
יום ג' - 17^{30}
יום ה' - $13^{00}-14^{00}$ חדר 123 בנין שרייבר

הגדרה: מרחב מדגם זו הקבוצה המסומנת ב-Ω ומכילה את כל התוצאות האפשריות בניסוי.

דוגמאות/תרגיל: לכל אחד מהניסויים הבאים רשמו את מרחב המדגם:

1. הטלת מטבע הוגן כאשר על צד אחד רשומה הספרה '1' ועל השני '0': $\Omega=\{0,1\}$
2. הטלת המטבע מסעיף 1 מס' סופי $n\in\mathbb{N}$ של פעמים: $\Omega=\{0,1\}^n$ - כל הסדרות באורך n של $0,1$.
3. הטלת קוביה עם 6 פאות: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
4. הוצאה עם החזרה של 2 כדורים מתוך כד עם 2 לבנים ו-1 שחור: $\Omega=\{(W,W),(W,B),(B,W),(B,B)\}$
5. כמו ב-4, בלי החזרה: $\Omega=\{(W,W),(W,B),(B,W)\}$

הגדרה: כל תת הקבוצה $A\subseteq\Omega$ של מרחב המדגם נקרא **מאורע**.

איברים במרחב המדגם יסומנו ב- $\omega\in\Omega$.

מאורע משלים: למאורע A ישנו מאורע משלים A^c שמוגדר ע"י $A^c=\Omega\setminus A$

תרגיל: מכל אחד מ-4 הימים הבאים מבצעים ניסוי: כל אחד מהניסויים יכול להצליח או להיכשל. נגדיר $A_i=$ הניסוי ביום ה-i הצליח.

1. האם המאורעות הנ"ל זרים והאם זרים בזוגות?

פתרון: נאמר שמאורעות אלו זרים בזוגות אם: $\forall i\neq j \quad A_i\cap A_j=\emptyset$ ← זרים בזוגות

והאם $\bigcap_{i=1}^{4}A_i=\emptyset$ ← המאורעות זרים

המאורעות לא זרים ולא זרים בזוגות. הסבר:

נגדיר את Ω: $\Omega=\{(b_1,\dots,b_4): b_i\in\{0,1\}, i=1,\dots,4\}$ כאשר היתה הצלחה ביום ה-i - $b_i=1$, אחרת $b_i=0$. כעת לפי אותם סימונים נבחר $i=1$, $j=2$

ונקבל: $A_i=A_1=\{(1,b_2,b_3,b_4): b_j\in\{0,1\}, j=2,3,4\}$
$A_j=A_2=\{(b_1,1,b_3,b_4): b_j\in\{0,1\}, j=1,3,4\}$ $\Rightarrow$ $A_i\cap A_j=\{(1,1,b_3,b_4): b_3,b_4\in\{0,1\}\}$

כמו כן: $\bigcap_{i=1}^{4}A_i=\{(1,1,1,1)\}\neq\emptyset$

② תארו את המאורעות הבאים בעזרת חיתוכים, איחודים ומשלימים של המאורעות שהוגדרו בשאלה:

(א) כל הניסויים הצליחו = $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$

(ב) לפחות ניסוי 1 הצליח = $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$

(ג) כל הניסויים נכשלו = $A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c\cap A_4^c = (\bigcup_{i=1}^{4} A_i)^c$

(ד) הניסוי הראשון שהצליח היה ביום השלישי = $A_1^c\cap A_2^c\cap A_3$

(ה) הניסוי השני שהצליח היה ביום השלישי = $(A_1\cap A_2^c\cap A_3)\cup(A_1^c\cap A_2\cap A_3)$

③ הוכיחו כי המאורע "כל הניסויים נכשלו" הוא המאורע המשלים למאורע "לפחות ניסוי 1 הצליח".

<u>פתרון:</u> נרשום מפורשות את המאורעות:

כל הניסויים נכשלו $= \bigcap_{i=1}^{4} A_i^c$

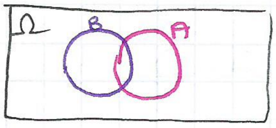
לפחות 1 הצליח $= \bigcup_{i=1}^{4} A_i$

....<u>מחוקי דה מורגן</u> נובע ש- $\boxed{\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c = (\bigcup_{i=1}^{4} A_i)^c}$

ובאופן כללי (חוק כללי): $\boxed{(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c}$

לכן התוצאה נובעת ישירות מחוקי דה מורגן.

<u>נבין את החוקים בעזרת דיאגרמת וון!</u>:



<u>טענה:</u> יהי Ω מרחב מדגם. עבור כל זוג מאורעות $A,B\subseteq\Omega$ מתקיים $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ [מהרה לפי-אינדוקציה]

<u>הוכחה:</u> נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:

$(A\cup B)^c\subseteq(A^c\cap B^c)$. יהי $\omega\in(A\cup B)^c$, אזי $\omega\notin A\cup B$ ולכן $\omega\notin A$, $\omega\notin B$

ולכן $\omega\in A^c$, $\omega\in B^c$. מכאן נובע ש- $\omega\in A^c\cap B^c$. ✓

אם לא קיימים איברים ב- $(A\cup B)^c$ אזי $(A\cup B)^c=\emptyset$ וההכלה מתקיימת באופן טריוויאלי.

$(A^c\cap B^c)\subseteq(A\cup B)^c$: יהי $\omega\in A^c\cap B^c$. אזי $\omega\in A^c$, $\omega\in B^c$, לכן $\omega\notin A$, $\omega\notin B$

מכאן נובע ש- $\omega\notin A\cup B$ ולכן $\omega\in(A\cup B)^c$ ✓ ∎

המשך מבוא להסתברות תרגול 1:

<u>הגדרה</u>: פונ' הסתברות $P:\Omega\to[0,1]$ זו פונ' המוגדרת ממרחב המדגם לקטע $[0,1]$.

ל- P יש מס' תכונות בסיסיות: ① <u>נרמול</u>: $\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1$

② <u>אדיטיביות</u>: $P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$ לכל מאורע A.

תכונות שנגזרות ישירות מ- 1+2: ③ $P(\Omega)=1$

④ $P(\emptyset)=0$

<u>הגדרה</u>: מרחב הסתברות זה זוג (Ω,P) כאשר Ω מרחב מדגם ו- P פונ' הסתברות שמוגדרת עליו.

<u>טענה</u>: יהיה $A\subseteq\Omega$ במרחב הסת' (Ω,P), אזי: $P(A)=1-P(A^c)$

<u>הוכחה</u>: נזכור ש- $A^c=\Omega\setminus A$ ואז: $P(A)+P(A^c)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega\setminus A}P(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1$ ■

<u>תרגיל</u>: יהי מרחב מדגם טבעיים$=\Omega$ ונגדיר פונ' הסתברות: $P(i)=\frac{k}{3^i}$

עבור k קבוע כלשהו ו- $i\in\Omega$. נגריל מס' $i\in\Omega$ לפי הסת' P.

Ⓐ מצאו את k: <u>פתרון</u>: נשתמש בתנאי נרמול: $1=\sum_{i=1}^{\infty}P(i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{3^i}$

נראה כמה שווה סכום סדרה הנדסית ונבנה חזרה: $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{3^i}$

$$S_n=S_{n-1}+\frac{k}{3^n}=S_{n-1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{k}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{n-1}=\frac{\frac{k}{3}-\frac{k}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$$

לכן: $$1=S_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{k}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{k}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k=2}$$

ובאופן כללי: $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}a_1q^i=a_1\cdot\frac{q-q^n}{1-q}\quad;\quad\sum_{i=1}^{\infty}a_1q^i=a_1\cdot\frac{1}{1-q}}$$

Ⓑ חשבו את הסיכוי ש- i זוגי. <u>פתרון</u>: נגדיר $A_{even}=\{\omega\in\Omega:\ \omega \text{ מס' זוגי}\}$

נרצה למצוא את $P(A_{even})$: $P(A_{even})=\sum_{\omega\in A_{even}}P(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}P(2i)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{4}$

טור הנדסי

Ⓒ חשבו את הסיכוי ש- i אי זוגי: <u>פתרון</u>: מתקיים $A_{odd}=A_{even}^c$

ומטענה הקודמת: $P(A_{odd})=1-P(A_{even})=3/4$ ■

טענה: יהיו $A,B \subseteq \Omega$ מאורעות כך ש- $A \subseteq B$. אזי: $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

הוכחה: נשים לב ש- $B = A \cup (B \setminus A)$ וכן $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. לכן:

$$P(B) = \sum_{\omega \in A \cup (B \setminus A)} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B \setminus A} P(\omega) = P(A) + P(B \setminus A) \blacksquare$$