מבוא להסתברות 26

שרשראות מרקוב

הוכחנו: לכל שרשרת קיימת התפלגות סטציונרית.

⚠ הערה: אם יש לפחות 2 התפלגויות סטציונריות ⟸ יש אינסוף כאלו. כי המרחב הוא מרחב ליניארי וניתן לנרמל.

משפט: עבור שרשרת מרקוב אי פריקה יש התפלגות סטציונרית יחידה.

נדבר ראשית על למה המסבירה במונחים הסתברותיים הכפלה מימין ב- P.

ראינו $\mu_t=\mu\cdot P^t$

למה: תהי f פונ' על S, כלומר $f:S\to\mathbb{R}$. נחשוב על f כוקטור עמודה.

אז $\forall x\in S,\ t\geq 0\quad (P^t\cdot f)(x)=E_x[f(X_t)]$

דוגמה: $f=\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}0\\1\end{array}$, $P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}\end{array}$

$$P\cdot f=\begin{pmatrix}1-p+2p\\ q+2(1-q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+p\\ 2-q\end{pmatrix}$$

כעת אם $\mu=(1,0)$ אז $\mu_1=(1-p\ \ p)$

אם $\mu=(0,1)$ אז $\mu_1=(q\ \ 1-q)$

הוכחת הלמה:

$$\delta_x=(0,\dots,0,\overset{x}{1},0,\dots,0)$$

$$(P^t f)(x)=\sum_{y\in S}P^t(x,y)\cdot f(y)=\delta_x P^t f$$

$$(P^t f)(x)=\sum_{y\in S}\underbrace{P^t(x,y)}_{P_x(X_t=y)}\cdot f(y)=\sum_{y\in S}P_x(X_t=y)\cdot f(y)=E_x(f(X_t))$$

נבהיר מדוע $P^t(x,y)=P_x(X_t=y)$.

אם ניתן ל- μ להיות ההתפלגות התמוכה רק על X, אז: $P_x(X_t=y)=\mu_t(y)=(\mu\cdot P^t)(y)=P^t(x,y)$, כאשר $\mu=(0,\dots,0,\overset{x}{1},0,\dots,0)$ ∎

הגדרה: $f:S\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית אם $P\cdot f=f$.

⚠ אבחנה: כל פונ' קבועה היא הרמונית. בפרט, 1 הוא ע"ע של כל שרשרת מרקוב.

למה: עבור שרשרת מרקוב אי פריקה, כל פונ' הרמונית היא קבועה.

הוכחה: נסמן $M=\max_{x\in S}f(x)$ ונסמן $x_0\in S$ מצב עבורו $f(x_0)=M$. כיוון ש- f הרמונית. $f(x_0)=M\overset{*}{=}\underbrace{(P\cdot f)(x_0)=E_{x_0}(f(X_1))}_{\text{למה קודמת}}$, כאשר $f(X_1)\leq M$ ⟸ נובע ש- $f(y)=M$ לכל y כך ש- $P_{x_0}(X_1=y)>0$. נשתמש באותו נימוק ונקבל שאם $f(x)=M$ אז גם $f(y)=M$ לכל y כך ש- $P_x(X_1=y)>0$. כיוון שהשרשרת אי פריקה סיימנו ∎

נוכיח כעת את יחידות ההתפלגות הסטציונרית עבור שרשרת מרקוב אי פריקה.

<u>הוכחה:</u>

ראינו שלפי הרמונית היא קבועה כלומר מימד מרחב הפתרונות ל- $P\cdot f=f$ הוא 1. במילים אחרות $(P-I)\cdot f=0$ בעל מימד פתרונות ממימד אחד.

נשתמש בכך שדרגת השורות זהה לדרגת העמודות כדי להסיק שגם מימד מרחב הפתרונות ל- $\pi\cdot(P-I)=0$ הוא 1.

כלומר יש מימד 1 של הפתרונות ל- $\pi\cdot P=\pi$, והמרחב הזה יכול להיות רק התפלגות בודדת כי בהתפלגות סכום הקואורדינטות 1.

מכאן שיש לכל היותר התפלגות סטציונרית אחת, וראינו כבר שקיימת אחת. ∎

⚠ <u>הערה:</u> נניח שבשרשרת אי פריקה, $\forall x\in S\ \pi_t(x)=\frac{1}{t}(\mu_0(x)+\dots+\mu_{t-1}(x))$ (הממוצע) מתכנסת להתפלגות הסטציונרית π. נניח שלכל ת"ס של π_t יש ת"ס נוספת שמתכנסת להתפלגות π, לכן π_t מתכנסת ל- π.