

הסתברות 22

תורת המרכז

יהי $0 < p < 1$ סביר ונניח $X_1, \dots, X_n$ ב"ש שווה התפלגות, $X_i \sim B(p)$

נסמן $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ אזי $S_n \sim B(n, p)$ (כאן) $\hat{S}_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

כעת $E(\hat{S}_n) = 0, V(\hat{S}_n) = 1$

משפט זה מתאר ויפוס: אם $-\infty < a < b < \infty$ מתקן י"פ:

$$P(a \leq \hat{S}_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

הוכחה:

נתבונן ב a, b . עבור $k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ אזי $P(S_n = k) = P(\hat{S}_n = k)$

אנו מעוניינים בטווח $a \leq \hat{S}_n \leq b$ ולכן נבדוק:

$$I_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leq \hat{S}_n \leq b\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid np + a\sqrt{np(1-p)} \leq k \leq np + b\sqrt{np(1-p)}\}$$

הצורה I_n נקראת אסמפוט a_k ו- b_k התיזה שווה עבור I_n כל k

$(a_k \sim b_k \text{ כאן}) \max_{k \in I_n} \left| \frac{a_k}{b_k} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: $k \rightarrow \infty$ כאשר $k \in I_n$

יש $\forall k \in I_n: \left| \frac{k}{np} - 1 \right| = \left| \frac{k - np}{np} \right| \leq \frac{|a| + |b| \sqrt{np(1-p)}}{np} = \frac{a + b\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{np}}$ $\leftarrow k \sim np$, $n - k \sim n(1-p)$ (יש)

2. משפט: $P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{k^2}{2}}$ התיזה שווה ב- I_n כאשר $k \rightarrow \infty$.

$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-k \log\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k) \log\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right)\right)$

3. משפט

התיזה שווה ב- I_n כאשר $k \rightarrow \infty$.

הוכחה: נזכר ש- $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$ ולכן $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1-p)^{n-k}$ נזכר גם ש- $m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$ כאשר $m \rightarrow \infty$.

נזכר גם ש- $m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$ כאשר $m \rightarrow \infty$.

$$\frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

$\frac{k^{n-k}}{n^{n-k}} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi np(1-p)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}$

ההתוצאה היא התיזה שווה, I_n , כאשר $k \rightarrow \infty$.

$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$

3. ב חזרה ב- (*) ונקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-k \log\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k) \log\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right)\right) \checkmark$$

$$\max_{k \in I_n} \left| k \log\left(\frac{k}{np}\right) + (n-k) \log\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right) - \frac{k^2}{2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4. משפט

הוכחה: נזכר שטורי טיורי של פונקציה $\log$: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$ $\forall |x| < 1$

$$\left| \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq |R_2(x)| = \frac{|x|^3}{3(1+\xi)^3} \leq \frac{3|x|^3}{8}$$
 $\forall |x| \leq \frac{1}{2}$ $\uparrow$ ξ נמצא בין 0 ל- x $\uparrow$ ξ נמצא בין $\frac{1}{2}$ ל-1

מכך נקבל ש-

$|x| \leq \frac{1}{2}$ אם

$$\epsilon_k = \frac{k-np}{np(1-p)} = \frac{k}{\sqrt{np(1-p)}} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- (מס)

$$\forall k \in I_n \quad |\epsilon_k| = \frac{|k|}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\max\{|a|, |b|\}}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ולכן} \quad \max_{k \in I_n} |\epsilon_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} (***) \quad k \log \frac{k}{np} + (n-k) \log \frac{n-k}{n(1-p)} &= k \log \left(1 + \frac{k-np}{np}\right) + (n-k) \log \left(1 - \frac{k-np}{n(1-p)}\right) = \\ &= k \log (1 + \epsilon_k(1-p)) + (n-k) \log (1 - \epsilon_k p) \end{aligned}$$

נצטרך בעצרת ג'ור את (האיברים):

$$(**) \quad \begin{cases} \log (1 + \epsilon_k(1-p)) = \epsilon_k(1-p) - \frac{1}{2} (\epsilon_k(1-p))^2 + r_{k,1} \\ \log (1 - \epsilon_k p) = -\epsilon_k p - \frac{1}{2} (\epsilon_k p)^2 + r_{k,2} \end{cases}$$

$$\max\{|r_{k,1}|, |r_{k,2}|\} \leq 3 \max_{k \in I_n} \{(\epsilon_k(1-p))^3, (\epsilon_k p)^3\} \leq C \max_{k \in I_n} |\epsilon_k|^3$$

$$k \log \frac{k}{np} + (n-k) \log \frac{n-k}{n(1-p)} = k(\epsilon_k(1-p) - \frac{1}{2} (\epsilon_k(1-p))^2 + r_{k,1}) + (n-k)(-\epsilon_k p - \frac{1}{2} (\epsilon_k p)^2 + r_{k,2}) =$$

$$= \dots = \frac{k^2}{2} - \frac{\epsilon_k^2 (k-np)(1-2p)}{2} + k r_{k,1} + (n-k) r_{k,2}$$

נעשה כאן
הערה: ϵ_k הוא
אנטי-קורלציה

כדי להראות את הנחה מספיק להראות:

$$\max_{k \in I_n} \left\{ \frac{\epsilon_k^2 (k-np)(1-2p)}{2} + k r_{k,1} + (n-k) r_{k,2} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$k-np = \epsilon_k \cdot np(1-p)$$

$$\left| \frac{\epsilon_k^2 (k-np)(1-2p)}{2} \right| + k r_{k,1} + (n-k) r_{k,2} \leq \frac{(1-2p)p(1-p)}{2} n |\epsilon_k|^3 + Cn |\epsilon_k|^3 =$$

מתקיים:

$$= ((1-2p)p(1-p) + C)n |\epsilon_k|^3$$

$$\max_{k \in I_n} n |\epsilon_k|^3 = \max_{k \in I_n} \frac{|k|^3}{\sqrt{np^3(1-p)^3}} \leq \frac{\max\{|a|, |b|\}}{\sqrt{np^3(1-p)^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

וקיפנו את 4!

כעת הוכחת משפט 2 מ"צית משמוש בלמות 3-4.

בתוספתו וזכירת את משפט 1

$$\left| \frac{P(S_n=k)}{\Delta_n f(k)} - 1 \right| \leq r_n \quad \forall k \in I_n \quad \text{ע"י} \quad r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{np(1-p)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{האיברי}$$

$$\forall k \in I_n \Rightarrow |P(S_n=k) - \Delta_n f(k)| \leq r_n \cdot \Delta_n \cdot f(k)$$

$$(k' \text{ מזהה } k) \quad k'_{n+1} - k'_n = \Delta_n \quad \text{מתקיים} \quad A_n := \Delta_n \sum_{k \in I_n} f(k) \quad - \text{(מס)}$$

כאשר קבוצה A_n היא סכום ריבון של f בקטע $[a, b]$ כאשר $\Delta_n \rightarrow 0$ ו- $k_n \rightarrow \infty$

$$P(a \leq \hat{S}_n \leq b) = \sum_{k \in I_n} P(S_n=k) \quad \text{ולכן מתקיים:} \quad A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$P(a \leq \hat{S}_n \leq b) - A_n = \sum_{k \in I_n} (P(S_n=k) - \Delta_n f(k)) \leq \sum_{k \in I_n} |P(S_n=k) - \Delta_n f(k)| \leq$$

(קב)

$$\leq r_n \cdot \sum_{k \in I_n} \Delta_n f(k) = r_n \cdot A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$\square \quad P(a \leq \hat{S}_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{וזהו!}$$