

מסתברות 19

תוחת וטיות חזרה

תכונות (משפט) תוחת השמירה: אם X, Y מ"מ עם אותו מרחק הסתברות, אזי

$$E(X) = E(E(X|Y)) \quad \text{אם } X \text{ בעל תוחת סופית או } X \text{ איננו (אזרח פורח עובדת)}$$

משפט השמירה השמירה: X, Y מ"מ באותו מרחק הסתברות,

$$Var(X) = Var(E(X|Y)) + E(Var(X|Y)) \quad \text{אם } X \text{ בעל שונות סופית, או } X \text{ בעל (בעל)}$$

תוחת סופית (אזרח הוכחה).

צ'י טווינט

$$P(X \geq t) \leq \frac{EX}{t}$$

אזי, שוויון מרקוב: אם X מ"מ $P(X \geq 0) = 1$ מתקיים:

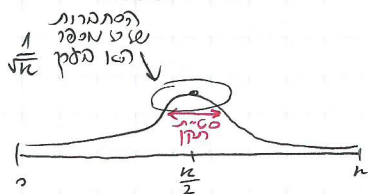
$$P(|X - EX| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

אזי שוויון צ'בישב: אם X מ"מ בעל שונות סופית אז

$$P(|X - EX| \geq k \sqrt{Var(X)}) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{בניכוח שקורנלציה } Var(X) \text{ (בעל)}$$

הוכחה (צ'בישב): $Y = (X - EX)^2$ אז $P(Y \geq 0) = 1$ ע"פ מא"ש מרקוב:

$$P(|X - EX| \geq t) = P(Y \geq t^2) \leq \frac{E(Y)}{t^2} = \frac{E[(X - EX)^2]}{t^2} = \frac{Var(X)}{t^2} \quad \text{(הצבת שונות)}$$



"ישויות" וחקר החמש וצ'י טווינט והמספרים הגדולים

רציונליות מספרים: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$, $X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$ ק"ל

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{n}{4}, \quad E[S_n] = nEX_1 = \frac{n}{2}$$

$$S_n \approx \frac{n}{2} \pm \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$\sigma_{S_n} = \sqrt{Var(S_n)} = \frac{1}{2}\sqrt{n} \quad \text{והתקן, וטאזשהו מוסך:}$$

$$\frac{S_n}{n} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{S_n}{n} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{200}$$

$$P(S_n \approx 5000 \pm 50) \quad \text{אם } n = 10,000 \quad \text{אם } n = 10,000$$

משפט: יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"מ קבלי מתמאמס שווי התפוצות ק"ל $Var(X_i) < \infty$.

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right| > \epsilon\right) \leq \frac{Var(X_1)}{n \cdot \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad 0 < \epsilon$$

הוכחה (צ'בישב): $Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ (נשתמש בט"ש צ'בישב).

$$Var(Y) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n} Var(X_1) \quad E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X_1)$$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right| > \epsilon\right) \leq P(|Y - E(Y)| > \epsilon) \leq \frac{Var(X_1)}{n \cdot \epsilon^2} \quad \text{וסך הכא שווי שונות צ'בישב:}$$

ייעוץ 2: חזקת ויירשטרס

משפט: תהי $R \rightarrow \mathbb{R}$, נוסף: פונקציה רציפה, אז אם $\epsilon > 0$ קיים פונקציה P כזו:

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| < \epsilon$$

הוכחה: עבור $x \in [0,1]$, נזכיר n ונשים $B_x \sim \text{Bin}(n, \frac{x}{n})$, ונשים גם $\frac{1}{n}$

$$E[f(B_x)] = \sum_{k=0}^n f(k) \cdot \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k (1-\frac{x}{n})^{n-k} =: P_n(x) \quad \leftarrow P(B_x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k (1-\frac{x}{n})^{n-k}$$

(שים לב ש- $P(x)$ הוא פונקציה ב- x .)

(ראה ש- P_n מתכנס ל- f במידה שווה): אינדיקטור התוחלת

$$|P_n(x) - f(x)| = |E[f(B_x)] - f(x)| = |E[f(B_x) - f(x)]|$$

נשים גם $f \in C[0,1]$ ונזכיר δ (קדם ϵ). אז קיים δ כך שלכל $|x-y| < \delta$

$$A_x = \{ |B_x - x| < \delta \} \quad \text{נזכיר שגודל: } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$|P_n(x) - f(x)| = |E[f(B_x) - f(x)] \cdot \mathbb{1}_A| + |E[f(B_x) - f(x)] \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}|$$

$$|1| = |E[f(B_x) - f(x)] \cdot \mathbb{1}_A| < \epsilon \quad \text{מסתבר, ש-}$$

עבור 2 , נשים גם ש- f חסומה ב- $[0,1]$ ונשים $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$

$$|2| = |E[f(B_x) - f(x)] \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}| \leq E|f(B_x) - f(x)| \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}} \leq 2MP(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{Var}(B_x)}{\delta^2} = \frac{n \cdot \frac{x}{n} (1-\frac{x}{n})}{\delta^2} \leq \frac{n \cdot \frac{1}{4}}{\delta^2} = \frac{n}{4\delta^2}$$

כעת