

הסתברות שיעור 18

נזכר שבהינתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ומאורע $A \in \mathcal{F}$ כך של $P(A) > 0$

ניתן להגדיר את מרחב ההסתברות המותנה ב- A : $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|A))$ כך של

$$P(\omega|A) = \begin{cases} \frac{P(\omega)}{P(A)} & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

כעת אם X מ"מ $\mathcal{F}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(X: \Omega \rightarrow \mathbb{R})$ אזי X הוא גם מ"מ $\mathcal{F}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ההסתברות המותנה $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|A))$, בעל התפוצת אחת בלבד, כזו.

דוגמה:

ישנם 100 תצפיות בשתי דקות, כס כמיליון ו-40 קטניה. נבחר תצפית

באופן אחיד. X - צין התצפית שבה. Y - מ"מ הדיתה של התצפית שבה.

(כך נהגנו למש במאמר) $A = \{Y=1\}$

עמדתה במרחב המותנה ניתנת לחשב תוחלת ושונות. מתקיים: $E[X|A]$, $Var(X|A)$

$$E[X|A] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega|A) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X=x|A)$$

$$Var(X|A) = E[(X - E[X|A])^2|A] = E[X^2|A] - (E[X|A])^2$$

$$E[X|A] = \frac{E[X \cdot 1_A]}{P(A)}$$

סעיף:

באשר הנונה היא שלילי, הודפס מוחדרים כיחז ושליש. $\leftarrow$ ח.כ.

מסקנות:

(1) אם X בעל תוחלת כופר במרחב המקומי אז הוא בעל תוחלת במרחב המותנה.

$$|E[X|A]| \leq E[|X| | A]$$

(2) מתקיים:

הכחף.

(2) נזכר שניכחד צורה נונה במרחב המקומי, כווננו $|E[X]| \leq E[|X|]$ $\Leftarrow$ $|E[X]| \leq E[|X|]$

$$|E[X|A]| = \frac{|E[X \cdot 1_A]|}{P(A)} \leq \frac{E[|X| \cdot 1_A]}{P(A)} = E[|X| | A]$$

או ש"ש את הצד שוויון. ישירות במרחב המותנה.

$$E[|X| | A] = \frac{E[|X| \cdot 1_A]}{P(A)} \leq \frac{E[|X|]}{P(A)} \leq E[|X|] < \infty$$

$$|X| \cdot 1_A \leq |X|$$

(3) באותו אופן אם X שונות כופר אז הוא בעל שונות כופר במרחב המותנה.

חזקת ביטחון חזקה

נתונים X ו- Y עם אותו מרחב הסתברות. נגדיר $ECX|Y$ כמ"ל חזק שהיא פונקציה של Y . נניח של X קצו תוחלת בסיסת. עבור y בתמונה של Y , כוונתו של $P(Y=y)$ (נגדיר $f(y) = E[X|Y=y]$ ^{הערה}). ואז נגדיר $E[X|Y] = f(Y)$.

$$E[X|Y](\omega) = E[X|Y=\omega]$$

כאן, יותר מדויק,

⚠️ הערה: אם Ω תוצאות עם הסתברות, אז ייתכן שהמאורע $\{Y=Y(\omega)\}$ בעל הסתברות 0. במקרה כזה $E[X|Y](\omega)$ מוגדר שרירותית, למשל 0.

בדוגמה הקודמת:
 $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$
 $X(\omega) =$ הציון של התלמיד
 $Y(\omega) =$ מסי הכיתה של ω

$$E[X|Y](\omega) = \begin{cases} E[X|Y=1] & Y(\omega)=1 \\ E[X|Y=2] & Y(\omega)=2 \end{cases}$$

כונת (נוסחת התוחלת הלא-מבוטלת): אם X, Y מ"ל עם אותו מרחב הסתברות, X קצו תוחלת בסיסת אז המ"ל $E[X|Y]$ קצו תוחלת בסיסת, ומתקיים:

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

מ"ל, פני של Y

הכחקה: נראה קודם של $E[X|Y]$ קצו תוחלת בסיסת, כוונתו של $E[E[X|Y]] = E[X]$

$$E[E[X|Y]] \leq E[E[X|Y]]$$

↑
מתקנה 2

עבור Y :

נזכר בנוכחיתו של פונקציה: אם $z = f(y)$ אז:

$$E[z] = \sum_y f(y) \cdot P(Y=y)$$

עבור Y

$$E[E[X|Y]] = \sum_y E[X|Y=y] \cdot P(Y=y) = \sum_y E[X \cdot 1_{Y=y}] = E[X \cdot \sum_y 1_{Y=y}] = E[X \cdot 1] = E[X]$$

↑
התוחלת של $1_{Y=y}$

ובאותו חיסוק, גושר יוצאים של $E[X|Y]$ קצו תוחלת בסיסת, $E[E[X|Y]] = E[X]$

בסת נכזה להבין את $Var(X)$ במונחים של $Var(X|Y)$ ו- $E[X|Y]$.

לכל מספרה $Var(X|Y)$ כי ייתכן למשל של $Var(X|Y) = 0$ כל $Var(X) \neq 0$

כונת (נוסחת התוחלת הממוצעת): יהיו X, Y עם אותו מרחב הסתברות, X קצו שונות

בסיסת. אז $E[X|Y]$ קצו שונות בסיסת, ו- $Var(X|Y)$ קצו תוחלת בסיסת, ומתקיים:

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y])$$

החוקי הסתברות 18

⚠️ הערה: שני הערכים $\text{Var}(X)$ ו- $E(X)$ יכולים להיות ∞ , אבל $\text{Var}(X)$ יכול להיות גם ∞ .

הכרת מושג הסתברות (השאלה)

⚠️ הערה: אם Z מ"מ קדם $E(Z^2) < \infty$ אז $E(Z) < \infty$, פשוט

$$0 \leq \text{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

כעת, נניח Z הוא פונקציה של X ונניח $E(Z^2) < \infty$. אז:

$$\begin{aligned} E[\text{Var}(X|Y)] &= E[E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2] = E[E(X^2|Y)] - E[E(X|Y)^2] = E(X^2) - E(E(X|Y)^2) \\ \text{Var}(E(X|Y)) &= E[E(X|Y)^2] - (E[E(X|Y)])^2 = E[E(X|Y)^2] - (E(X))^2 \\ &\stackrel{||}{=} E(X^2) - (E(X))^2 = \text{Var}(X) \end{aligned}$$

פונקציה של המשתנה הסתברותי

נניח X, Y הם משתנים סתברותיים ו- g פונקציה. אז:

$$E[X \cdot g(Y)|Y] = g(Y) \cdot E[X|Y]$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} E[X \cdot g(Y)|Y](\omega) &= E[X \cdot g(Y)|Y=Y(\omega)] = \frac{E[X \cdot g(Y) \cdot 1_A]}{P(A)} = \\ &= \frac{E[X \cdot g(Y(\omega)) \cdot 1_A]}{P(A)} = g(Y(\omega)) \cdot \frac{E[X \cdot 1_A]}{P(A)} = g(Y(\omega)) \cdot E[X|A] = g(Y(\omega)) \cdot E[X|Y](\omega) \end{aligned}$$

חוקי-שווינות

אם X הוא משתנה סתברותי $(P(X \geq 0) = 1)$, אז:

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t} \quad (t > 0)$$

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(X=x) = \sum_{x \geq 0} x \cdot P(X=x) \geq \sum_{x \geq t} x \cdot P(X=x) \geq t \cdot \sum_{x \geq t} P(X=x) = t \cdot P(X \geq t)$$

הערה: $P(X \geq t)$ היא הסתברות $P(X=x)$ עבור $x \geq t$.