

הסתברות 7

מסתברות משותפת של שני משתנים: אם $E[X_i^2] < \infty$ וק"ל אזי

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

תוצאות: יהיו X, Y משתנים משותפים.

הצורה: נאמר ש- XY

- (1) $\text{Cov}(X, Y) > 0$ מתאמים חיובית אם
- (2) $\text{Cov}(X, Y) < 0$ מתאמים שלילית אם
- (3) $\text{Cov}(X, Y) = 0$ בלתי מתאמים אם

אין תלות $\Leftrightarrow$ חוסר תלות.

משפט: אם $X_1, \dots, X_n$ משתנים משותפים ובלתי מתאמים (כלומר $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ לכל $i \neq j$) אזי

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

דוגמה: חוסר תלות. היות שיש תלות חזקה יותר נא. תוצאה.

נניח $X \sim \begin{cases} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{cases}$. $Y = X^2$. $Y \sim \begin{cases} 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{cases}$. X, Y אינם בלתי תלויים.

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] - E[X]E[Y] = 0 - 0 = 0$$

קודם כולם: עבור X, Y משתנים משותפים:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

הצורה: מתאם המרחק.

תכונות:

(א) מושגר הטיב כאשר $E[X^2], E[Y^2] < \infty$, וכן X, Y אינם קבועים (כלומר מקבלים

לפחות 2 ערכים בהסתברות חיובית).

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X) \quad (ב)$$

$$\rho(aX, bY) = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \rho(X, Y) \quad (ג)$$

$$\rho(X+a, Y+b) = \rho(X, Y) \quad (ד)$$

כך התחנות נוספות מתחנות השונות והשונות השונות.

משפט: אם X, Y משתנים משותפים, אז אלו מרחק הסתברותי הם קבועים

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{אם } Y = aX + b, \text{ אז } \rho(X, Y) = 1$$

$$\rho(X, Y) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{אם } Y = -aX + b, \text{ אז } \rho(X, Y) = -1$$

הכרחי: (זו מבקשה מא' קשה יותר) $\text{Cov}(X, Y)$ היא מרובת

פנימית וזכר $| \text{Cov}(X, Y) | \leq \sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}$ $\leftarrow$ ושיוון כאשר $\text{Cov}(X, Y) = \pm \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}$

נסתק שיהיה את המענה כאשר $\text{EX} = \text{EY} = 0, \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$ EY נוסף כי משתנים

$\bar{Y} = \frac{Y - \text{EY}}{\sqrt{\text{Var}(Y)}}, \bar{X} = \frac{X - \text{EX}}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$

$\Rightarrow \rho(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \text{Cov}(X, Y)$

היא את ρ

נשים גם $0 \leq \text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = 2(1 - \text{Cov}(X, Y)) = 2(1 - \rho(X, Y))$

$\text{Var}(X - Y) = 0$ ושיוון רק אם $\rho(X, Y) = 1$

$P(X - Y = 0) = 1$ כוונת

כדי לקבל את הכיוון הנגדי ($-1 \leq \rho$) נסתק את $\text{Var}(X + Y) = \dots$ נמוך עבור $0 \leq \text{Var}(X + Y)$

תוחמת / שונות בותנה:

זכר שבהתקן מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ואלוים B ק $0 \leq P(B) < 1$, הדבר $(\Omega, P(\cdot|B))$, $P(\omega|B) = \begin{cases} 0 & \omega \notin B \\ \frac{P(\omega)}{P(B)} & \omega \in B \end{cases}$ את מרחב ההסתברות הנותנה B ע

וכן האנו של $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

כעת אם X מ"מ ע $(\Omega, \mathcal{F})$ אז המאז מ"מ ע $(\Omega, P(\cdot|B))$ זכר ניתן להגדיר:

$E[X|B] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega|B) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X=x|B)$

$\text{Var}(X|B) = E[(X - E(X|B))^2|B] = E(X^2|B) - E(X|B)^2$ וכן:

$E[X|B] = \frac{E[X \cdot 1_B]}{P(B)}$ תכונה:

תורת ההתנה במשתנה מקרי:

(א) נדבר מש ע $E[X|Y=z]$ כאשר Y ע איתו מרחב ההסתברות

(ב) נדבר ד. ע $E[X|Y]$ זכר חזש:

הצבה: $E[X|Y]$ היא מ"מ המצמיה, שהיא פונ של Y .

כמו: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כוונת $f(y) = E[X|Y=y]$

$E[X|Y] = f(Y)$ ואז נדבר: