

הסתברות 15

תוצאות

תצפיות - הצדקות: $E(x) = \sum_{x \in \Omega} x \cdot P(X=x)$ וכן $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$

הצדקה נוספת:

התוחלת של פונקציה נמדדת על ידי:

יהי $X_1, \dots, X_n$ מ"מ עם אותו מרחב הסתברות ויהי $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$

אם לכל $\omega \in \Omega$, $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in D$ אז נכונות ההצדקה

הצדקה: $Y = f(X_1, \dots, X_n)$

דוגמאות: $f(x,y) = x+y$, $f(x,y) = xy$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

מספר (הצדקה של שתי תוחלות): בתנאים אלה, $E(Y) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$

כאשר שיהיה נדביר את החוק החזקה והשלישי:

ביטויים צורה: $S_+ = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ f(x_1, \dots, x_n) > 0}} f(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$; $S_- = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ f(x_1, \dots, x_n) < 0}} f(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$

ושם, התוחלת של Y מוצגת אלמנט צפופות יחידה S_+, S_-

כאשר, והתוחלת של Y מסת אלמנט S_+, S_- כאדם.

הוכחה: מספיק להראות שהחוק החזקה והשלישי (השלישי) נקיים

$\sum_{y \in \mathbb{R}} y P(Y=y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y P(f(X_1, \dots, X_n)=y) = S_+ = \sum_{y \in \mathbb{R}} y P(Y=y)$ כה נכון כי:

$\sum_{y \in \mathbb{R}} y \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = S_+$
 שני כוכביות: $\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$

דוגמה: עבור $f(x,y) = x+y$ אנו יודעים ש- $E(f(X,Y)) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

הוא תמיד תוחלת של פנל היא הפנל של התוחלות?

תשובה - ברור כי לא. למשל: בני (אם כי) יום נעבירה. אם יש גשם והוא

נכנס במהירות אחרת נכנס באופנים במהירות קטנה.

הצדקה היא באורך קטן, ויש גם היום בסבי 1/2 מהתוחלת הכנס שיתח צני שחידים?

סתחן: נדביר ל להוציא התוחלת של צני T-1 זהות הכנס שוקדח צני.

אז $Y \sim 5$ או $T = \frac{5}{Y}$ כיוסמאל $f(x) = \frac{5}{x}$ אז אנו נענינים $E(f(Y))$

$$EV = 5 \cdot \frac{1}{2} + 40 \cdot \frac{1}{2} = 22.5, V = \begin{cases} 5 & 1/2 \\ 40 & 1/2 \end{cases}$$

נבין קודם את V:

$$E(T) = E(f(V)) = f(5) \cdot \frac{1}{2} + f(40) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{16}$$

$$f(E(V)) = 22.5 + \frac{9}{16} = E(f(V))$$

נשים לב שמקרה זה: $f(E(V)) = E(f(V))$ שםת

תוחלת של מופנה או מ"ה ק"ה

משפט: אם X, Y מ"ה בזמן תצו"פ שהם או בעלי תוחלת סופית או אי-שנייה,

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad \text{אם } (0 \cdot \infty = 0) \quad \text{רואים נכרים ש-}$$

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} xy P(X=x, Y=y) \stackrel{\text{כיו תצו"פ}}{=} \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} xy P(X=x) P(Y=y)$$

הוכחה: נספ תוחלת ותוחלת זו

$$E(XY) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X=x) \left[\sum_{y \in \mathbb{R}} y P(Y=y) \right] = E(X) E(Y)$$

מוחק כי התוחלת סופית או אי-שנייה

⊗ נקבע מהמשפט החדש = אם $\sum a_n, \sum b_n$ טורים שאם שניהם מתכנסים בריבוע

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{אם שניהם אי-שנייה, אז}$$

הוכחה: אנחנו סושר הטורים מתכנסים בריבוע: (טוב קודם ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |b_n|$$

בריבוע.

ע"י נתיחת $N \rightarrow \infty$ נקבע התכנסות בריבוע. יבאנו אונס (ואם ערכים מוחלטים

נקבע את מה שצ"נ

⚠ הבהרה: "יתקן" ותוחלת $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ אם כמעט X, Y אינם ק"ה,

אז נקרא X, Y בזמן תצו"פ.

$$y = x^3 \quad \text{ק"ה נראות ש- } X, Y \text{ תצו"פ.}$$

בוצע:

$$X \sim \begin{cases} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{cases}$$

$$E(XY) = \dots$$

שיעור הפסא

א"כ: