מבוא להסתברות 14

תוחלת

תוחלת היא ממוצע משוקלל של משתנה מקרי.

הגדרה: התוחלת של משתנה מקרי X היא $\boxed{E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\omega)}$.

אם מרחב המדגם Ω סופי, התוחלת מוגדרת היטב.

דוגמא: תוחלת של הטלת קוביה:

$$X(\omega)=\omega \Rightarrow E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\ldots+6\cdot\frac{1}{6}=3.5 \; ; \; \Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, \; P=\frac{1}{6} \; \ldots \; \frac{1}{6}$$

דוגמא נוספת: שחקן זורק 2 זריקות וקולע באחת בסיכוי $\frac{1}{3}$ באופן בלתי תלוי.

מה תוחלת כמות הסלים?

פתרון: $X((\omega_1,\omega_2))=\omega_1+\omega_2$

$$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \quad P=\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{9}$$

$$\Downarrow$$

$$E(X)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

כאשר המרחב אין סופי (בן מניה), נחלק למקרים:

① נאמר שתוחלת X סופית אם $\sum_{x\in\Omega}|X(\omega)|P(\omega)<\infty$ (הטור מתכנס בהחלט), ואז $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)$ (לא תלוי בסדר סכימה).

② נאמר ש- $E(X)=\infty$ אם $\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)>0}}X(\omega)P(\omega)=\infty$ ו- $\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)<0}}|X(\omega)|\cdot P(\omega)<\infty$

③ באותו אופן, $E(X)=-\infty$ אם $\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)>0}}X(\omega)P(\omega)<\infty$ ו- $\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)<-\infty}}|X(\omega)|\cdot P(\omega)=\infty$

④ במקרה הנותר, שבו $\sum_{\substack{X(\omega)>0\\ \omega\in\Omega}}X(\omega)P(\omega)=\infty \wedge \sum_{\substack{X(\omega)<0\\ \omega\in\Omega}}|X(\omega)|P(\omega)=\infty$ נאמר שהתוחלת של X אינה מוגדרת.

⚠ בפרט, התוחלת של משתנה ששומר סימן תמיד מוגדרת.

משפט (התוחלת תלויה רק בהתפלגות המשתנה המקרי): עבור משתנה מקרי X,

$$E(X)=\sum_{x\in\mathbb{R}}x\cdot P(X=x).$$

כאשר התוחלת סופית אם $\sum|x|P(X=x)<\infty$, וכך שאר המקרים רק שהגדרנו..

הוכחה: מספיק להראות ש- $\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)>0}}X(\omega)P(\omega)=\sum_{0<x\in\mathbb{R}}x\cdot P(X=x)$, ובאותו אופן

ניתן להראות שהחלקים השליליים שווים.

המשך ↲

המשך הוכחה: נתחיל מאגף שמאל:

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)>0}} X(\omega)P(\omega) \overset{\uparrow}{=} \sum_{x>0}\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} X(\omega)\cdot P(\omega) = \sum_{x>0}\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} x P(\omega) \overset{\downarrow}{=} \sum_{x>0} x P(X=x)$$

מותר לשנות סדר סכימה ~~רק חיוביים~~ בטור אי-שלילי

הגדרת השוויון $X=x$

∎

דוגמאות נוספות

א) **תוחלת של משתנה ברנולי:** נאמר ש- $X\sim Ber(p)$ $(P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p)$.

אזי $E(X)=p$.

ב) **תוחלת של משתנה גיאומטרי:** נאמר ש- $X\sim G(p)$ $(k\geq 1,\ k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1})$.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$$

ידוע ש- $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k=\frac{1-p}{p}$. ניתן לגזור איבר איבר לפי p, ונקבל

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{-p-(1-p)}{p^2}=\frac{-1}{p^2}$$

⇐ ולכן סה"כ $E(X)=\frac{1}{p^2}\cdot p=\frac{1}{p}$.

ג) **תוחלת של משתנה פואסוני:** $X\sim Poisson(\lambda)$: $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k\geq 0$ שלם

אז

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{m=0}e^{-\lambda}\underbrace{\frac{\lambda^m}{m!}}_{\text{טור טיילור של } e^{\lambda}}=\lambda$$

לינאריות התוחלת

משפט: יהיו X,Y משתנים מקריים על אותו מרחב הסתברות.

א) לכל קבוע $c\in\mathbb{R}$, $E(cX)=cE(X)$ (הכוונה שאם אגף שמאל מוגדר כולל אינ' ימין מוגדר, לפי הקונב' ש- $0\cdot\infty=0$).

ב) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ (הכוונה שאם אגף שמאל מוגדר כולל ימין מוגדר כלומר לא מתקבל $\infty-\infty$).

⚠ נדגיש שהמשתנים X,Y אינם בהכרח ב"ת או תלויים באופן ספציפי כלשהם.

הוכחה:

א) נניח ש- $E(X)$ מוגדרת. אם $c=0$ התוצאה ברורה. נוכיח עבור $c>0$ בה"כ: (דומה עבור $c<0$)

$$E(cX)=\begin{cases}\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ cX(\omega)>0}}cX(\omega)P(\omega)=c\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)>0}}X(\omega)P(\omega)\\ +\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ cX(\omega)<0}}cX(\omega)P(\omega)=c\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)>0}}X(\omega)P(\omega)\end{cases}=cE(X)$$

ומכאן התוצאה.

ב) נוכיח רק כאשר התוחלות של X,Y סופיות (השאר בתרגיל בית).

נתחיל בלהראות שהתוחלת של $X+Y$ סופית. לפי הגדרה, נחשב

$$\sum_{\omega\in\Omega}|X(\omega)+Y(\omega)|P(\omega)\overset{\uparrow}{\leq}\sum_{\omega\in\Omega}(|X(\omega)|+|Y(\omega)|)P(\omega)\overset{\uparrow}{=}\sum_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}|Y(\omega)|\cdot P(\omega)<\infty$$

אי"ש המשולש; טור אי-שלילי; מהנתון.

טורים מתכנסים בהחלט; הגדרה

כעת $E(X+Y)=\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+Y(\omega))P(\omega)\overset{\downarrow}{=}\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\omega)\overset{\downarrow}{=}E(X)+E(Y)$

∎

המשך הסתברות 14.3

דוגמאות נוספות:

(א) <u>תוחלת של משתנה בינומי</u>: $X\sim Bin(n,p)$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ עם $0\le k\le n$.

כדי לחשב את $E(X)$, נזכר שאפשר לבחור מרחב הסתברות עם משתנים מקריים $Y_1,\dots,Y_n$ ב"ת, $Y_i\sim Ber(p)$ ולהגדיר $X=Y_1+\dots+Y_n$

ואז $X\sim Bin(n,p)$. כעת, מלינאריות התוחלת: $E(X)=\underbrace{E(Y_1)}_{=p}+\dots+\underbrace{E(Y_n)}_{=p}=np$.

(ב) <u>"פרדוקס יום ההולדת"</u>: הפרדוקס לכאורה הוא הטענה שאם ימי הולדת מפוזרים אחיד (וב"ת), נסביר שבכיתה בגודל ≥ 23 תלמידים יש זוג שנולדו באותו יום.

נראה זאת במובן של תוחלת:

נניח ויש כיתה עם n תלמידים בעלי ימי הולדת אחידים וב"ת. יהי X כמות זוגות התלמידים עם אותו יום הולדת. מה $E(X)$?

<u>פתרון</u>: לכל זוג תלמידים $1\le i,j\le n$, $i\ne j$ נגדיר משתנה מקרי

$Y_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{i ו-j בעלי אותו יום הולדת}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ ואז $X=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}Y_{i,j}$ לכן $E(X)=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}E(Y_{i,j})=\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{365}\underset{\text{אם } n>23}{\uparrow}{>}1$.

חציון ושכיח:

עבור משתנה מקרי X <u>החציון</u> הוא כל מס' x כך ש- $P(X\le x)\ge\frac12$, $P(X\ge x)\ge\frac12$

<u>דוגמא</u>: $X\sim\begin{cases}1 & 1/4\\ 2 & 1/4\\ 3 & 1/4\\ 4 & 1/4\end{cases}$ - כל מס' $2\le x\le 3$ הוא חציון של X.

<u>השכיח</u> של X הוא כל מס' x כך ש- $P(X=x)$ מקסימלית.