מבוא להסתברות 12

טענה: אם $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת, נגדיר $Y:=F(X_1,\dots,X_k)$
$F:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. אזי $X_{k+1},\dots,X_n, Y$ ב"ת.

⚠ **מסקנה:** אם נפעיל פונ' על אוספים זרים של מ"מ ב"ת נקבל מ"מ ב"ת.

הוכחה:

יהי $y, x_{k+1},\dots,x_n\in\mathbb{R}$. צ"ל $P(Y=y\wedge X_{k+1}=x_{k+1}\wedge\dots\wedge X_n=x_n)=P(Y=y)\cdot P(X_{k+1}=x_{k+1})\cdots P(X_n=x_n)$

נגדיר $S=\{\langle x_1,\dots,x_k\rangle\in\mathbb{R}^k \mid F(x_1,\dots,x_k)=y\}$

$$P(Y=y\wedge X_{k+1}=x_{k+1}\wedge\dots\wedge X_n=x_n)=P(F(X_1,\dots,X_k)=y\wedge X_{k+1}=x_{k+1}\wedge\dots\wedge X_n=x_n)\overset{\text{מאורעות זרים}}{=}$$

$$=\sum_{\langle x_1,\dots,x_k\rangle\in S}P(X_1=x_1\wedge\dots\wedge X_n=x_n)\underset{\text{אי תלות מנתון}}{=}\sum_{\langle x_1,\dots,x_k\rangle\in S}P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n)=$$

$$=P(X_{k+1}=x_{k+1})\cdots P(X_n=x_n)\cdot\sum_{\langle x_1,\dots,x_k\rangle\in S}\left(P(X_1=x_1)\cdots P(X_k=x_k)\right)\underset{\text{אי תלות של } X_1\dots X_k}{=}P(X_{k+1}=x_{k+1})\cdots P(X_n=x_n)\cdot\sum_{\langle x_1,\dots,x_k\rangle\in S}P(X_1=x_1\wedge\dots\wedge X_k=x_k)\underset{\text{מאורעות זרים}}{=}$$

$$=P(Y=y)\cdot P(X_{k+1}=x_{k+1})\cdots P(X_n=x_n)\ \blacksquare$$

עוד מסקנה: אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת אז לכל תת קב' $A_1,\dots,A_n\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים

$$P(X_1\in A_1,\dots,X_n\in A_n)=P(X_1\in A_1)\cdots P(X_n\in A_n)$$

הוכחה: נגדיר $Y_i=1_{A_i}(X_i)$ ונשתמש במשפט שהוכחנו כרגע.

התפלגויות נפוצות, המשך:

התפלגות גיאומטרית: התפלגות μ נקראת גיאומטרית $G(p)$ עבור $0<p\le1$
אם $k=1,2,\dots$ $\boxed{\mu(k)=p(1-p)^{k-1}}$, עבור השאר $\mu(k)=0$ (לעתים נקראת
הכת' הצלחה).

דוגמא: יוסי מטיל קוביה הוגנת באופן ב"ת עד הפעם הראשונה שמתקבל 6.
יהי X מס' ההטלות.

התפלגות פואסונית: התפלגות μ נקראת $Poisson(\lambda)$ (או $Poi(\lambda)$, $P(\lambda)$)
עבור $\infty>\lambda>0$ אם התומך של μ מוכל ב- $\{0,1,2,\dots\}$: $\boxed{\mu(k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}$

נשים לב שזו אכן התפלגות: $\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$

ההתפלגות הזו עולה בטבע כאשר אנו נתקלים במצב שבו חלק קטן ממנו
המאורע שאנו רוצים מתפלג אחיד.

דוגמא: מס' התביעות בשעה בחברת ביטוח, או מס' הזימונים בחנות עוגה.

משפט: תהי (P_n) סדרת מספרים בין 0 ל-1 כך ש- $n \cdot P_n \to \lambda$.

אז אם $X_n \sim Bin(n, P_n)$ אזי לכל $k \in \{0,1,2,\dots\}$ מתקיים:

$$\boxed{P(X_n=k) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}$$

הסברים לא פורמליים: בואו נחפש כמה שיחות התקבלו בשעה במרכזיה.

ממוצע λ שיחות בשעה — X - מס' שיחות בשעה.

אז ממוצע $\frac{\lambda}{60}$ שיחות בדקה — $X \sim Bin(60, \frac{\lambda}{60})$

אז ממוצע $\frac{\lambda}{3600}$ שיחות בשניה — $X \sim Bin(3600, \frac{\lambda}{3600})$

דוגמא:

יצרנו פרמוטציה π אחידה על n איברים. יהי X כמות נק' השבת.

$$X = |\{1 \le i \le n \mid \pi(i) = i\}|$$

טענה: לכל קבוע k אי-שלילי:

$$P(X=k) \xrightarrow{k\to\infty} \frac{e^{-1}}{k!}$$

הוכחנו בתרגיל בית - זו התפלגות $Poisson(1)$

כלומר כמות נק' השבת בפרמוטציה אחידה שואפת ל-$Poisson(1)$

צימודים:

בהינתן זוג התפלגויות חד-מימדיות (או יותר), נמשל d_1, d_2 מימדיות, כ התפלגות דו מימדית (או d_1+d_2) שההתפלגויות השוליות שלה הן μ_1, μ_2 נקראות **צימוד** של μ_1, μ_2.

⚠ הערה: רק אחת היא הצימוד הב"ת שבו $\mu(k,m) = \mu_1(k) \cdot \mu_2(m)$

דוגמא:

יהי $0 \le p \le 1$. תהי $\mu_1 \sim Ber(p)$, $\mu_2 \sim Poisson(p)$. אזי קיים צימוד μ של μ_1, μ_2 כך ש- $\sum_{\substack{(x,y) \\ x \ne y}} \mu(x,y) \le p^2$. כלומר ניתן למצוא מרחב הסתברות ומ"מ X, Y כך ש- $X \sim Ber(p)$, $Y \sim Poisson(p)$ וגם $P(X \ne Y) \le p^2$.

הוכחה:

	x\y	0	1	2
$1-p$	0	$1-p$	0	0
p	1	$e^{-p}-(1-p)$	pe^{-p}	$\frac{p^2}{2}e^{-p}$
		e^{-p}	pe^{-p}	$\frac{p^2}{2}e^{-p}$

נזכר ש- $1-p \le e^{-p}$ וכן:

$$\sum_{\substack{(x,y) \\ x \ne y}} \mu((x,y)) = 1 - \sum_{\substack{(x,y) \\ x = y}} \mu(x,y) = 1 - (1-p+pe^{-p}) =$$

$$= p(1-e^{-p}) \le p(1-(1-p)) = p^2 \quad \blacksquare$$

המשך לבוי׳ה והסתברות 12

נזכיר את ה"כבומרי":

נגדיר את $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1,\dots\}$ $\qquad P((x,y)) =$ ההסתברות שבטבלה

המ"מ יהיו ההאורי. $\qquad Y((x,y)) = y \qquad X((x,y)) = x$

אז $P(X \neq Y) \neq p$ מהחישוב לפני.

סכום שני מ"מ המפולגים פואסון

<u>משפט</u>: יהיו X_1, X_2 מ"מ בת"ל כך ש- $X_1 \sim Poisson(\lambda_1), X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$

נגדיר: $Y := X_1 + X_2$ אזי $Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$

<u>הוכחה</u>:

עבור $k \geq 0$ שלם נחשב

$$P(X=k) \overset{\text{נרמ}}{=} \sum_{x_1=0}^{k} P(X_1 = x_1, X_2 = k - x_1) \overset{\text{אי תלות}}{=} \sum_{x_1=0}^{k} P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = k - x_1) =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{k} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-x_1}}{(k-x_1)!} = e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{x_1=0}^{k} \frac{\lambda_1^{x_1} \cdot \lambda_2^{k-x_1}}{x_1! \, (k-x_1)!} \cdot k! \cdot \frac{1}{k!} \underset{\text{בינום}}{=} e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$$

∎

<u>משפט גבול פואסוני</u>: לכל n נתונים n מ"מ בת"ל $(X_{n,k})_{k=1}^{n}$ כך ש-

1. $X_{n,k} \sim Ber(P_{n,k})$
2. $\sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \xrightarrow{n \to \infty} \lambda$
3. $\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$X_1 = X_{1,1}$

$X_2 = X_{2,1} + X_{2,2}$

$X_3 = X_{3,1} + X_{3,2} + X_{3,3}$

$\vdots$

אז אם $X_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$ נקבל ש- $P(X_n = m) \xrightarrow{n \to \infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$

<u>מקרה פרטי</u>: $P_{n,k} = P_n$ אזי $X_n \sim Bin(n, P_n)$

ותנאי 2 מתקיים $nP_n \xrightarrow{n \to \infty} \lambda$

ותנאי 3 מתקיים אוטומטית $nP_n^2 \longrightarrow \lambda \lim P_n = 0$