

בסיסי פתרון

שיעור 9

מושגים בסיסיים:

הצבה: בהינתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, משתנה מקרי X הוא $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

ניתן להצביר מאורעות באמצעות משתנים מקריים.

בהינתן תת-קבוצה של הישר הממשי נכונות $\{X \in A\}$ את השוויון $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

דוגמאות:

1) הנ"ל: הטלת קובייה והצגת פלטת האוסף ה"ל".

יהי X המשתנה המקרי של סכום הטלות הקובייה.

$$X(x, y) = x + y \quad \Omega = \{(1,1), \dots, (6,6)\} \quad P(X \leq 3) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 3\}) = P(\{(1,1), (1,2), (2,1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

2) נתון כי יש 6 כדורים, ביניהם 4 ירוקים. מוצעים 2 שלפים להחזרה.

יהי X - כמות הכדורים שנגרשו.

$$\Omega = \{(GM), (NG), (GG), (MM)\} \quad P: \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}, \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}, \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}, \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \Rightarrow P(X=1) = P(\{(GM), (NG)\}) = \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 9}$$

3) בהינתן $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מאורע A נובע להצביר את המשתנה המקרי האינדיקטור

$$1_A \text{ סימון } A \quad \forall \omega \in \Omega \quad 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

$$P(1_A=1) = P(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\}) = P(A)$$

התפלגויות:

הצבה: התפלגות היא פונקציה $\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ שמקיימת

התנאי של התפלגות μ הוא $\int_{\mathbb{R}} \mu(x) dx = 1$

⚠️ הפונקציה שפסוק בהן תקבולה עם שונה מאפס רק במסלול או כן מנייה של נקודות, והטור $\sum_x f(x)$ יתכנס בהחלט (f אי ששגית).

טענה: אם μ היא פונקציה $\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ כך של μ שונה מאפס על קב' שאינה

$$\text{בת מניה אז } N = |\{x \mid \mu(x) > \varepsilon\}| < \infty$$

$$\{x \mid \mu(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid \mu(x) > \frac{1}{n}\}$$

אם הקב' סגורה מניה, וזה אי-חיד של סגור בת מניה הקב' בת מניה.

עקרון קרייט הקב' נכונה!

$$\sum_x f(x) \geq \sum_{x \in S, f(x) > \varepsilon} f(x) > \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

ע"כ קיבענו שםבור פונקציה כזו

והיא לא יכולה לשמש כהתפלגות לפי הזדרה זו.

הזדרה: התפלגות של משתנה מקרי היא הפונקציה $\mu(x) = P(X=x)$

$$\sum_x \mu(x) = \sum_x P(\omega | X(\omega)=x) = P(\Omega) = 1, \mu(x) \in [0,1]$$

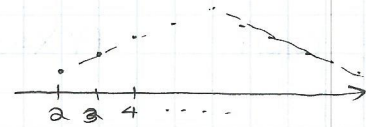
$X=x$ אינה תיחה עבור מ"כ מנייה של

x כי $|\Omega| \leq \aleph_0$ וכן גם כיות כי X ח"ל.

חשב התפלגות בצדמאות:

① קבוצת X נתמכת על

$$P(X=i) = \begin{cases} \frac{i-1}{36} & 2 \leq i \leq 7 \\ \frac{13-i}{36} & 8 \leq i \leq 12 \end{cases}$$



$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{30}{90} & x=0 \\ \frac{48}{90} & x=1 \\ \frac{12}{90} & x=2 \\ 0 & x \notin \{0,1,2\} \end{cases}$$

②

$$P(A=x) = \begin{cases} P(A) & x=1 \\ P(A^c) & x=0 \\ 0 & x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

③

דוג מועתנים מקריים:

התפלגות זו ביחידות:

$$\sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \mu(x,y) = 1$$

הזדרה: פונ' $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$ בע"ה תומך סופי/קנ מנייה

עבור זוג מ"מ X, Y מועדריס על אותו מרחב הסתברות,

ההתפלגות של הזוג היא הפונקציה $\mu(x,y) = P(X=x, Y=y)$

הכוונה לחייתך מאורעות, כזומר $\omega \in \Omega | X(\omega)=x, Y(\omega)=y$

⚠ להתפלגות זוג משתנים אז יותר נקרא גם התפלגות משותפת.

⚠ אותה הנוחה כמנ משתנה יחיד מטה שזכאן התפלגות.

חברה בצדמאות:

① ψ -תוצות הקוסיה והאשונה (X =סכום). מהי ההתפלגות של (X,ψ)

(כמון μ התפלגות זו. התקן ש μ היא $\{(\alpha, \beta), \dots, (\alpha, \beta)\}$

$y \backslash x$	2	3	4	...
1				
2				
...				

כזוס $\mu: \frac{1}{36}$

⚠ אפשר ליצור התפלגות צומימית בסביבה

הכונן הסתברותי 9

$2 \setminus 1$	0	1
0	$\frac{30}{90}$	$\frac{24}{90}$
1	$\frac{24}{90}$	$\frac{12}{90}$

② Y אינדיקטור כדור טיפון ירוק

Z אינדיקטור כדור שני ירוק.

③ נתון (Ω, P) וצד מאורעות $A, B \rightarrow \Omega$.

מה ההתפלגות המשותפת של $1_A, 1_B$

$1_B \setminus 1_A$	0	1
0	$P(A^c \cap B^c)$	$P(A \cap B^c)$
1	$P(A^c \cap B)$	$P(A \cap B)$

הצבה: כאשר נתונים צד מ"מ X, Y , אז אותו מחק הסתברות,

ההסתברות של X בעצד או Y בעצד נקרא התפלגויות שוליות.

ניתן לרכז את ההתפלגויות השוליות מן ההתפלגויות המשותפת (הכוח) את המאורעות X ו- Y שורה/עמודה בהתאם, או עזרה לזכור: מטאמורה של וקטור.

הצבה: כאשר ש-2 מ"מ שווים אם הם אותו הפונקטור (Ω, P) . נסמן $X=Y$

כאשר ש-2 מ"מ הם שני התפלגויות אם יש להם את אותה התפלגות (כאן פונקטור על אותו מחק הסתברות). נסמן $X \stackrel{d}{=} Y$ (distributional equality)

⊗ בדיוק 2 מתקיים $X \neq Y$ ו- $X \stackrel{d}{=} Y$

⊗ ניתן להגדיר שוויון התפלגויות גם בצד (או יותר) מ"מ.

התפלגות מותנה

בהינתן (Ω, P) , מאורע A עם $P(A) > 0$ ומשתנה מקרי X , נגדיר את

התפלגות המותנה של X בהינתן המותנה $(\Omega, P|A)$ כאומר:

$\mu(x) = P(X=x|A)$ - כאותו אופן הסתברות של צד או יותר משתנים.

⚠ נמשך אם נתונים צד מ"מ Y, X ניתן לדבר על ההתפלגות המותנה

של X בהינתן $Y=y$ כאשר $P(Y=y) > 0$.

כאשר בדיוק 1: התפלגות X בהינתן $Y=2$ היא:

$$\mu(x) = P(X=x|Y=2) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 3 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(מכיוון ש-2 היא שורה/עמודה מתאמה ומכיוון P שהכוח = 1).

הערך הסטטיסטי ← $P(X=x, Y=y)$

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

← סכום הערכים
כש $Y=y$