

# הסתברות נטיית 8

$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4}$   
 $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$   
 $A = \{1, 2\}$   
 $B = \{2, 3\}$   
 $C = \{1, 3\}$   
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $P = \{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$

(3 האורעות חלופיים אבל בתל' כזויות)

פתרון משימה:

⊗ עבור האורעות: (סימטריה)  $1 \leq i \leq k$

$A_i = \{ \text{קובץ } i \text{ קובצו} \}$   
 $A_n = \{ \text{קובצו תחתית של } P \}$

$$\frac{1}{2} = P(A_1) = \dots = P(A_{n-1}), \quad \frac{1}{2} = P(A_n)$$

כדי נראה שההסתברות של  $A_n$  היא חצי נשים נל.

הסתברות  
של

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{n-2} P(B_k) P(A_n | B_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} P(B_k) = \frac{1}{2}$$

$B_k = \{ \text{קובצו } k \text{ של } P \}$   $0 \leq k \leq n-2$ . האורעות  $B_k$  יוצרים חלוקה של המרחב.

סעיף: כ  $1 \leq k$  האורעות אלה הם ב"ר.

הנחתו נכונה  $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$  הם התת.

כל  $P$  של  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$  ב"ר. (נבחר אחד מ- $2^{(n-1)}$  השאלות הרישוי).

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \dots \cap A_n) = P(A_1 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \dots \cap A_n) = \left\{ \begin{matrix} A_i \text{ נכונה} \\ A_i \text{ איננה נכונה} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

מכאן ההסתברות כזוהי  $A_1, \dots, A_n$  ב"ר.

אבל כנ"ל האורעות אינם ב"ר כדי נראה זאת נסתחן.

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \begin{cases} 0 & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ \left( \frac{1}{2} \right)^n & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases} \neq \left( \frac{1}{2} \right)^n = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

## בחרתי מכפלה

בזמא: משיג קו"ר פת"ר ואז מסקנה הוצ'ם, הרישוי האופן ב"ר.

מיוצג:

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\} \quad \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\} \quad \Omega_3 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P_1 = 1/6 \quad P_2 = 1/6 \quad P_3 = 1/2$$

אפשר למצוא את ביצוע שישת תנאים האופן ב"ר על מרחב מרפורה:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{ (i, j, k) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, k \in \{1, 2\} \}$$

$$P(i, j, k) = P_1(i) \cdot P_2(j) \cdot P_3(k) = \frac{1}{48}$$

$$A_3' = \{ (i, j, k) \mid (i, j) \in \{ (1, 2), (2, 1) \} \}$$

נציג האורעות:

$$P(A_3') = \sum P(i, j, k) = \frac{1}{48} |A_3'| = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

(תנאים א מרחבי הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  נרצה להזכיר מרחב (המנצל את סידור הניסויים הנזו באופן כ"ל. צרו מרחב המנצל).

$$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \forall i=1 \dots n: \omega_i \in \Omega_i\}$$

$$P((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \prod_{i=1}^n P_i(\omega_i)$$

האם זה מרחב הסתברות?  
האם ניתן להפיץ הסתברויות?

טעות עבר: עקור טאורם זל- $A_i \subseteq \Omega$  עבר  $A_i'$  ע"י:

$$A_i' = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in A_i\} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$$

$$P(A_1' \cap \dots \cap A_n') = P(A_1) \dots P(A_n) \quad \text{כל } A_1 \subseteq \Omega_1, \dots, A_n \subseteq \Omega_n \text{ מתק"פ}$$

$$A_1' \cap \dots \cap A_n' = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in A_i \forall i=1 \dots n\} \quad \text{תכונה נשים דבר-}$$

$$P(A_1' \cap \dots \cap A_n') = \sum_{\substack{(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ \omega_i \in A_i}} P(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{\substack{(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ \omega_i \in A_i}} P_1(\omega_1) \dots P_n(\omega_n) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\omega_i \in A_i} P_i(\omega_i) \right) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

### מסקנות

①  $(\Omega, P)$  הוא מרחב הסתברות

② כל  $1 \leq i \leq n$  וטאורם  $A_i \subseteq \Omega_i$  מתק"פ  $P(A_i') = P_i(A_i)$

③ כל  $A_1 \subseteq \Omega_1, \dots, A_n \subseteq \Omega_n$  מתק"פ-  $A_1' \cap \dots \cap A_n'$  הם כ"ל-  $(\Omega, P)$

הוכחה:

① כאשר  $P((\omega_1, \dots, \omega_n)) \geq 0$  נגיד

$$P(\Omega) = P(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n) = P(\Omega_1' \cap \dots \cap \Omega_n') = P(\Omega_1') \dots P(\Omega_n') = 1 \dots 1 = 1 \quad \checkmark$$

② נקדם  $1 \leq i \leq n$  וטאורם  $A_i$   
 $P(A_i') = P(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n) = 1 \dots 1 \cdot P_i(A_i) \dots 1 = P_i(A_i) \quad \checkmark$

③ נקדם טאורם  $A_i \subseteq \Omega_i$  נשים צד  $(A_i')^c = (A_i)^c$  ב"ב  $2^n$  שוויונות.

$$P((A_1')^c \cap \dots \cap (A_n')^c) \stackrel{2}{=} P((A_1)^c \cap \dots \cap (A_n)^c) \quad \text{נראה אחד בצדטא והשאר טאורם צורה.}$$

$$P((A_1')^c \cap \dots \cap (A_n')^c) = P_1(A_1^c) \cdot P_2(A_2^c) \cdot P_3(A_3^c) \dots P_n(A_n^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \dots P(A_n^c) =$$

$$= P(A_1)^c \cdot P(A_2)^c \cdot P(A_3)^c \dots P(A_n)^c \quad \checkmark$$

## המשך הסתברות 8 :

### צ"ת תצות בנות

טאור ו-  $(\Omega, \mathcal{P})$  מרחק הסתברות ו-  $C \subseteq \Omega$  לאור כן  $P(C)$ .

ניתן להעניק ולקבץ את מרחק ההסתברות (המותר)  $(\Omega, \mathcal{P}(C))$ .

אם  $A, B \subseteq \Omega$  כ"ל. הטאור הפז זה כ"ל מרחק ההסתברות המותר  $P(A)$  ?

טענה: מרחק המותר  $A, B$  לא בהכרח כ"ל. (ישנן חשוקים על בוצמא...)

טענה: ניתן למצוא  $A, B$  שכ"ל מרחק המותר איננו כ"ל מרחק המותר.

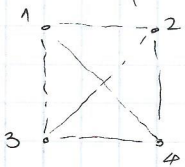
### בוצמא: חשוקים מברויים

עבור  $0 < p < 1$ . נבט להצדיר חלל מקור עם  $n$  קובצוקים ע"כ

שכל קשת רבין קובצוקים שונים חושוקים בסכום  $p$  באופן כ"ל.

מה הסיכוי שקיימת קודה מבוזבת (כלומר קובצוקים נטא קשתות) ?

$n=4$



נסמן  $A =$  קיימת קודה מבוזבת  $p$

אנחנו מחשבים

טענה: לכל  $0 < \epsilon$

$$P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{אם } p = (1+\epsilon) \frac{\log n}{n} \text{ אז } (1)$$

$$P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{אם } p = (1-\epsilon) \frac{\log n}{n} \text{ אז } (2)$$

הוכחה

(1)

טענה: אם  $p$  ממשית  $1-p \leq e^{-p}$ .

הוכחה: השוק  $e^{-p}$  קטנה וכן  $1-p$  שטא חושק

כ-ס נמצא מרחק לזל.



חברת  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  כ"ל  $1 \leq i \leq n$   $A_i =$  קובצוקים מבוזבים  $p$

$$P(A) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n) = n P(A_1) = n (1-p)^{n-1} \leq n e^{-(n-1)p} =$$

$$= n e^{-n(1-\epsilon)p} = n e^{-n(1-\epsilon) \frac{\log n}{n}} = n e^{-\log n (1-\epsilon)} = n^{1-\epsilon} \rightarrow 0$$