קבוצות הסתברות

שיעור 2

<u>דוגמא</u>: בכד ישנם 10 פתקי הצבעה 5 לכל מועמד. מערבבים ושולפים 3

① מה ההסתברות שמועמד א' יקבל יותר פתקים?

② מה " לשני פתקים דומים למועמד א'?

<u>פתרון</u>: שני מודלים סבירים לניסוי

(i)
Ω = {(א,א,א), (א,א,ב), (א,ב,א), (א,ב,ב), (ב,א,א), (ב,א,ב)}

$P = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8},\ \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\ \dots$

(ii)
$\Omega = \{3,2,1,0\}$

$P = ?$

① המאורע הנדון הוא: A = {אאא, אאב, אבא, באא}

$P(A) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}$

② A = {אאא, אאב, באא}

(i) $P(A) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}$

(ii) אי אפשר!!

$\Leftarrow$ כל מידול מכיל אינפורמציה אחרת, יש לבחור מידול מתאים לבעיה, בהתאם לדרוש.

<u>תכונות של מאורעות</u>:

<u>טענה</u>: בכל מרחב הסתברות

(א) $P(\Omega)=1,\ P(\emptyset)=0$

(ב) $\forall A\subseteq\Omega:\ P(A^c)=1-P(A)$

(ג) $\forall A,B\subseteq\Omega:\ A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

<u>הגדרה</u>: אי-חוצים זרים: נאמר שסדרת מאורעות $A_1,A_2,\dots$ הם זרים

אם $\forall i\neq j:\ A_i\cap A_j=\emptyset$ (לעיתים נקראים זרים בזוגות).

③ אם $A_1,A_2,\dots$ זרים אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

← גם אינסופי!

<u>הוכחה</u>:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\cancel{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)}\sum_{\omega\in\bigcup A_i}P(\omega)\underset{\text{זרים}}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\omega\in A_i}P(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\ \blacksquare$$

⊛ כיוון שמאורעות הם קבוצות, ניתן להשתמש בכללים מתורת הקבוצות

- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

דה מורגן

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\in\Omega\mid\exists n\ \omega\in A_n\}$$

טענה: לכל שתי מאורעות A,B : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

דוגמא: נניח מטבע, בעל סיכוי $1/3$ לעץ, פעמיים. מה הסיכוי לקבל לפחות עץ אחד.

....

חסם האיחוד של איחודים לא זרים

טענה: אם $A_1,A_2,\dots$ מאורעות במרחב אזי $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{\omega\in\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}P(\omega)\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\omega\in A_n}P(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\quad\blacksquare$$

כל ω נספרת
פעם אחת בשמאל
ולפחות פעם אחת בימין

מרחבי הסתברות אחידים:

הגדרה: יהי (Ω,P) מרחב הסתברות. הוא ייקרא אחיד אם:

$$|\Omega|<\aleph_0 \text{ (סופית)} \ \wedge\ \forall\omega\in\Omega\ P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}$$

⚠ אין מרחב הסתברות אחיד על $|\Omega|\ge\aleph_0$

דוגמא: פרמוטציה אחידה.

הגדרה: פרמוטציה מסדר n היא פונקציה חח"ע מ-$\{1,\dots,n\}$ אל עצמו.

הק' כל הפרמוטציות מסדר n נסמן S_n.

טלפון שבור מקרי: יש n ילדים. הם רושמים את שמותיהם על פתקים ומכניסים לכובע ומערבבים. אחד הילדים מוציא פתק ומספר שמועה לילד ששמו עליו עד שמגיעים לראשון. מה הסיכוי שהשמועה תעבור בדיוק k אנשים? $(1\le k\le n)$.

ניסוח שקול: מגרילים פרמוטציה f מ-S_n בסיכוי שווה לכל הפרמוטציות. מה ההסתברות ש-$\underbrace{f(f(\dots f(1))\dots)}_{k\text{ פעמים}}=1$ וגם $\forall i<k\ f(f(\dots f(1))\dots)\neq1$

פתרון: $A=\{$הפתק עבר בדיוק k אנשים$\}$, $I=\{(a_1,a_2,\dots,a_{k-1})\mid\forall i\ 2\le a_i\le n\}$

עבור $\vec a\in I$: $A_{\vec a}=\{a_0=1=a_k,\ a_i$ שולח את $a_{i+1}\}$

$$A=\biguplus_{\vec a\in I}A_{\vec a}\Rightarrow P(A)=\sum_{\vec a\in I}P(A_{\vec a})$$

(זר)

$$P(A_{\vec a})=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{(n-k)!}{n!}$$

$$|I|=\binom{n-1}{k-1}(k-1)!$$

$$P(A)=\frac{(n-k)!}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot(k-1)!=\frac{1}{n}\quad\blacksquare$$