חדו"א 2 משפטים

טענה: f אינטגרבילית רימן ⇐ f חסומה.

מונוטוניות סכום דרבו: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות, אזי: $\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)$

$\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)$ ⇐ לכל שתי חלוקות $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$

קריטריון דרבו: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטג' רימן ⇔ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$

כך שלכל $\lambda(\Pi)<\delta$ אז $0\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\varepsilon$

תוספת נק' לחלוקה: $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p\}$ אזי: $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)-\lambda(\Pi_1)\cdot\omega(f,[a,b])$

$\Pi_2=\Pi_1\cup\{p_1,\dots,p_k\}$ אזי: $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)-k\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$

$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)+k\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$

למה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\lambda(\Pi)<\delta$ אז:

$\cancel{\underline{I}(f)-\varepsilon\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)}$, $\cancel{\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{I}(f)+\varepsilon}$

$\overline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{I}(f)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$, $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$

מסקנה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ ⇐ $f\in R([a,b])$

קריטריון דרבו משופר: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ונניח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת Π המקיימת

$\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ ⇔ $f\in R([a,b])$

רציפות ⇐ אינטגרביליות: f רציפה ⇐ $f\in R([a,b])$

מונוטוניות ⇐ אינטגרביליות: f מונוטונית ⇐ $f\in R([a,b])$

איחוד הקטעים זרים: $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה. $f\in R([a,b]), f\in R([b,c])$ ⇐ $f\in R[a,c]$

תת הקטע: $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה. $f\in R([a,c])$ ⇐ $f\in R[b_1,b_2]^{c[a,c]}, f\in R[a,c]$

כל תת הקטעים השמאליים: $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה. לכל $a<b<c$ $f\in R[a,b]$ ⇐ $f\in R[a,c]$

שינוי פונ' בנק': לא משפיע על אינטגרביליות. ⇐ פונ' רציפה/מונוטונית חוץ ממספר

כמס סופי נק' אינטגרבילית. (אך כדורק לוגו)

אריתמטיקה: $f,g\in R[a,b]$ ⇐ $f+g, cf, |f|, f^2, f\cdot g, f\circ g, \frac{1}{g}\in R[a,b]$

פונ' שנבדלות בקב' סופית: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

לינאריות האינטגרל באינטגרנד: $f,g\in R[a,b]$ ⇐ $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$

חיוביות: $f\in R([a,b])$, $f\ge0$ ⇐ $\int_a^b f\ge0$

אינטגרל=0: $g\ge0$. אז $\int_a^b g=0$ ⇔ לכל תת קטע $J\subset[a,b]$ מתקיים $\inf_J g=0$

מונוטוניות האינטגרל: $f,g\in R[a,b]$, $f\ge g$ ⇐ $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

ליניאריות בתחום האינטגרציה: $f\in R[a,c]$, $b\in[a,c] \Leftarrow$ $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$

רציפות האינטגרל המסוים: $f:[a,b]\to R$ אינטגרבילית. אזי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה.

א' שוויון שימושי: $f\in R[a,b]$, $m\le f\le M \Leftarrow$ $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$

$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}|f|(b-a) \Leftarrow$ אם f רציפה קיים $\exists x_0\in(a,b)$ כך ש- $f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

ערך הביניים הראשון: $f:[a,b]\to R$ רציפה, $0\le g\in R[a,b]$. אזי קיים $x_0\in[a,b]$ כך ש-

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx=f(x_0)\int_a^b g(x)dx}$$

הנוסחה של בונה - גרסא I: f מונוטונית, $g\ge 0$ אינטג' אזי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש-

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)dx$$

הנוסחה של בונה גרסא II: $f,g:[a,b]\to R$, g רציפה, f רציפה וגזירה ברציפות ב- (a,b), ולכל $x\in(a,b)$, $f'(x)\ge 0$ (או $f'(x)\le 0$), אזי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש-

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)dx$$

המשפט היסודי של החדו"א: $f\in R[a,b]$, $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)$ רציפה. אזי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ גזירה ב- x_0 ומתקיים $F'(x_0)=f(x_0)$

ניוטון לייבניץ: $f\in R[a,b]$, $F:[a,b]\to R$ הקדומה של f ב- $[a,b]$ רגיל. אזי

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

ניוטון לייבניץ כללי יותר: $f\in R[a,b]$, $F:[a,b]\to R$ רציפה וגזירה פרט למס' סופי של נק' בקטע, $F'(x)=f(x)$, אזי $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

אינטגרציה בחלקים: $f,g:[a,b]\to R$ גזירות, $f',g'\in R[a,b]$. אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]_a^b-\int_a^b fg'$

שארית אינטגרלית בטיילור: $f\in C^{n+1}[a,b]$, $x\in[a,b]$, אזי: $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(a,x)$ כאשר $\boxed{R_n=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}$ $\Leftarrow$ הוכחה באינדוקציה

שינוי משתנה: $f:[a,b]\to R$ רציפה. $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ כך ש- $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ ו- φ גזירה ברציפות. אזי

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

$\Leftarrow$ באינטגרל לא אמיתי, יש להזהר!

דעיכת מקדמי פורייה בהינתן גזירות: $f\in C^1[0,2\pi]$, $M=\sup_{[0,2\pi]}|f'|$ אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx\right|\le\frac{2\pi M}{n}$$

נוסחת Wallis:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2n-2)(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2n-1)(2n-1)}=\frac{\pi}{2}$$

קריטריוני התכנסות לאינטגרל לא אמיתי:

קושי לאינטגרל לא אמיתי: $f:[a,\omega)\to R$, ולכל $b\in(a,\omega)$: $f\in R[a,b]$ אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס (לגב' סופי) $\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in(a,\omega)\ \forall b_1,b_2\in[B,\omega):\ \left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

חדו"א 2 משפטים (ב)

<u>התכנסות בהחלט ⇐ התכנסות:</u> $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט ⇐ מתכנס ומתקיים $\left|\int_a^\omega f\right| \le \int_a^\omega |f|$

פונ' אי שלילית:

<u>חסימות הקדומה:</u> $0\le f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ולכל $b<\omega$: $f\in R[a,b]$. אזי:
$\int_a^\omega f<\infty \iff F(b)=\int_a^b f(x)dx$ חסומה על $[a,\omega)$.

<u>השוואות אינטגרלים:</u> $0\le f\le g$, $\int_a^\omega g<\infty \Rightarrow \int_a^\omega f<\infty$
$\int_a^\omega f=\infty \Rightarrow \int_a^\omega g=\infty$.

<u>השוואה לטורים:</u> $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ יורדת, $f\ge 0$. אזי $\int_1^\infty f<\infty \iff$ הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty$.
יתר על כן מתקיים: $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$

<u>משפט דיריכלה:</u> $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$. f מונוטונית, $f\in C^1[a,\omega)$, $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$,
g רציפה, $\int_a^x g$ חסום כפונ' של x $\Rightarrow$ $\int_a^\omega fg<\infty$

<u>משפט אבל:</u> $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$, f מונוטונית, $f\in C^1[a,\omega)$, f חסומה.
g רציפה, $\int_a^\omega g<\infty$. אזי $\Rightarrow$ $\int_a^\omega fg<\infty$

התכנסות במ"ש:

<u>מכפלה:</u> $f_n,g_n,f,g:I\to\mathbb{R}$ פונ' ונניח ש- $f_n\xrightarrow{u}f$, $g_n\xrightarrow{u}g$. כמו כן נניח שכל הפונ' <u>חסומות במידה אחידה ע"י M</u>. אזי $f_ng_n\xrightarrow{u}fg$.

<u>קריטריון קושי להתכנסות במ"ש:</u> $f_n:I\to\mathbb{R}$ מתכנסת במ"ש $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים N_ε כך שלכל $n,m>N_\varepsilon$ מתקיים שלכל $x\in I$: $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

<u>שלילת התכנסות במ"ש:</u> סדרת פונ' אינה מתכנסת במ"ש אם קיים $\varepsilon_0>0$, סדרת נק' $(x_k)_{k=1}^\infty\subseteq X$ ותת סדרה n_k כך ש- $|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|>\varepsilon_0$

<u>גבול במ"ש של רציפות רציף:</u> $f_n:I\to\mathbb{R}$ רציפות, $f_n\xrightarrow{u}f$. אזי f רציפה.

<u>משפט Dini:</u> $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות, $f_n\to f$ נקודתית. נניח גם ש-
(א) $f_n(x)$ יורדת (מונוטונית) לכל x נתון (ב) f רציפה $\Rightarrow$ $f_n\xrightarrow{u}f$.

<u>למה של היינה ובורל:</u> $a<b\in\mathbb{R}$, ותהיינה קב' פתוחות על הישר $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כאשר A קב' אינדקסים כלשהי (לאו דווקא בת מנייה). נניח כי הן כיסוי של $[a,b]$, כלומר $[a,b]\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$. אזי קיים תת כיסוי סופי: $[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{M}U_{\alpha_i}$

<u>התחלפות גבול ואינטגרל:</u> $f_n\in R[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו- $f_n\xrightarrow{u}f$. אזי $f\in R[a,b]$ ויתר על כן $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

מז'ורנטה: $f_n:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינט' בכל תת הקטע סגור ולכל n $\int_a^\omega f_n<\infty$. תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$
ובכל תת קטע סגור $f_n \xrightarrow{k} f$. נניח בנוסף שקיימת מז'ורנטה $\psi:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינט' בכל תת
הקטע סגור כך שלכל n: $|f_n|\le\psi$ וגם $\int_a^\omega\psi<\infty$. אזי $f\in R[a,b]$ לכל תת
הקטע סגור, האינטגרל הלא אמיתי ב- $[a,\omega)$ מתכנס ויתר על כן $\int_a^\omega f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n(x)dx \le \int_a^\omega \psi(x)dx$

התכנסות נגזרות וגבול: $g,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f_n\in C^1[a,b]$, וגם:
① קיימת נק' $x_0\in[a,b]$ כך ש $f_n(x_0)$ מתכנסת (לגבול סופי) ② $f_n' \xrightarrow{k} g$
אזי קיימת $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש $f'=g$ וגם $f_n\xrightarrow{k} f$.

טורים:

רציפות, התכנסות סכום אינסופי ואינטגרל: $u_n\in C[a,b]$, $\sum_{n=0}^\infty u_n=f$ במ"ש. אזי $f\in C[a,b]$
ומתקיים: $\int_a^x f(t)dt=\sum_{n=0}^\infty\int_a^x u_n(t)dt$

Dini לטורים: $f,u_n\in C[a,b]$ ונניח ש- $u_n\ge 0$ ונתון $f=\sum u_n$. אזי $f=\sum u_n$ במ"ש

התכנסות נגזרות וסכום אינסופי: $u_n\in C^1[a,b]$, $\sum u_n'=g$ במ"ש, וגם קיימת נק' בה
$\sum u_n(x_0)<\infty$ מתכנס. אזי קיימת $f=\sum u_n$ במ"ש וגם $(\sum u_n)'=f'=\sum u_n'$

מבחן M: $u_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, קיימת סדרת מס' M_n כך ש- $\sum^\infty M_n<\infty$. לכל x ולכל n
$|u_n(x)|\le M_n$. אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

קריטריון אבל: $a_k(x),b_k(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרות פונ' ונניח ש:
$\sum_{n=1}^\infty b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$, $\{a_n(x)\}$ מונו' ב-n לכל x קבוע וחסומה במידה אחידה.
אזי $\sum a_n(x)b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$.

קריטריון דיריכלה: $a_k(x),b_k(x):[a,b]\to\mathbb{R}$. $S_N(x)=\sum_{n=1}^N b_n(x)$ חסומה במידה אחידה ב- $[a,b]$,
$\{a_n(x)\}$ מונו' ב-n לכל x קבוע ושואפת ל-0 במ"ש. אז $\sum a_n b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$.

משפט וייرשטראס: לכל $f\in C[a,b]$ ולכל ε קיים פולינום $P(x)$ כך ש- $\max|f(x)-P(x)|<\varepsilon$

התכנסות בפוסק: $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$. אם הטור מתכנס בנק' $|x_0|=r$ אז לכל $r'<r$
הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r',r']$.

משפט אבל: לכל טור חזקות $\sum a_k x^k$ קיים $R\in[0,\infty]$ כך שבתחום $\{x \mid |x|<R\}$
הטור מתכנס וב- $\{x \mid |x|>R\}$ הטור מתבדר.

קושי הדמרד: רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$: $\frac{1}{R}=\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{1/k}$

רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות: ל- $\sum a_k x^k$ ול- $\sum k a_k x^{k-1}$ אותו רדיוס התכנסות.

משפטים חדוא 2 (3)

טורי חזקות ניתן לגזור איבר-איבר: נניח כי $\sum a_k x^k$, נסמן רדיוס ההתכנסות R ואת הפונ' אליה מתכנס ב- $f(x)$. בכל נק' ב- $(-R,R)$ מתקיים $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x)$

טור טיילור של טור חזקות: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס ל- $f(x)$ ב- $(-R,R)$, אזי לכל $m\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in(-R,R)$:

$$f^{(m)}(x) = \sum a_k k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k-m} = \sum_{j=0}^{m}\frac{(j+m)!}{j!}a_{j+m}x^j$$

טורי טיילור:

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ - $(-1,1)$
- גזירה $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}$ - $(-1,1)$
- $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ - $[-1,1)$
- אינטגרציה $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ $(-1,1)$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$ - $[-1,1]$

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: $f(x)=\sum a_k x^k$ ונניח שיש התכנסות ב- $x_0=R$, אז הטור מתכנס במ"ש ב- $[0,R]$.

תחום ההתכנסות לאחר השינויים: נניח ש- $\sum k a_k x^{k-1}$, $\sum a_k x^k$ רדיוס התכנסות R ונניח שטור הנגזרות מתכנס ב- x_0 כך ש $|x_0|=R$. אז גם הטור המקורי מתכנס ב- x_0.

טור סכים הוא גם סכים לפי אבל והסכומים שווים: נניח שנתונה סדרת מס' המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k<\infty$. אזי השוויון הבא מתקיים $\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

סכימות על פי צזארו ⇐ סכימות על פי אבל: $\sum a_k x^k$ מתכנס לפי צזארו, אזי הטור סכים על פי אבל ומתקיים $(C)\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (A)\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

פורייה:

הטלה מאונך לקירוב: $f\in R(\mathbb{T})$, אזי $S_N-f\perp S_N$ ($\Leftarrow$ $S_N\cdot f\perp e_k$ לכל $|k|\le N$)

מסקנה: $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\|f\|^2=\|S_Nf\|^2+\|f-S_Nf\|^2$

אי שוויון בסל: $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\|S_Nf\|^2\le\|f\|^2$ לכל N וגם בגבול $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\le\|f\|^2$

הלמה של רימן לבג: $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}|\hat{f}(n)|=0$

התכנסות במ"ש ⇐ התכנסות L_2: $f_n, f\in R(\mathbb{T})$. $f_n\xrightarrow{u}f \Rightarrow f_n\xrightarrow{L_2}f$

פולינומים צפופים ברציפות במובן L_2: לכל $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה קיימים פולינומים $P_n(x),Q_n(x)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}\|P_n(x)+iQ_n(x)-f(x)\|\longrightarrow 0$

פולינומים טריגו' צפופים: $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ רציפה עם $f(0)=f(2\pi)$. ויהי $\varepsilon>0$. אזי קיים פולינום טריגו' $P_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e_k(t)$ כך ש $\sup_{x\in[0,2\pi]}|P_n(t)-f(t)|<\varepsilon$

קירוב במובן L_2: $f\in R(\mathbb{T})$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים פולינום טריג' P ק"ש $\|P-f\|<\varepsilon$

ובפרט קיימת סדרת פולינומים טריג' $P_n(t)$ כך ש $P_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט + שוויון פרסבל: $f\in R(\mathbb{T})$, אזי מתקיים $\lim_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|=0$ כלומר

$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi}|f(x)-S_N(x)|^2dx=0$ ובפרט מתקיים שוויון פרסבל: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat f(n)|^2=\|f\|^2$

S_Nf קירוב טוב ביותר: $f\in R(\mathbb{T})$, אזי הפולינום הטריג' מדרגה $\le N$ הקרוב ביותר

ב-L_2 ל-f הוא S_Nf. כלומר לכל $C_k\in\mathbb{C}$: $\|\sum_{n=-N}^{N}c_ne_n-f\|^2\ge\|\sum_{k=-N}^{N}\hat f(n)e_n-f\|^2$

טורי פורייה שני: $f(t)=t$: $S_Nf(t)=\sum_{n=1}^{N}2\cdot(-1)^{n+1}\frac{\sin(nt)}{n}$ $\overset{\text{פרסבל}}{\Longleftarrow}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$

$f(t)=\frac14(\pi-t)^2$: $S_Nf(t)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(nt)}{n^2}$ $\overset{\text{פרסבל}}{\Longleftarrow}$ $\boxed{\sum\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$

מקדמי פורייה של נגזרת: $f\in C^1(\mathbb{T})$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ מחזורית 2π וגזירה ברציפות.

אזי $\hat{f'}(n)=in\hat f(n)$, ובפרט $n\hat f(n)\to0$

דעיכת המקדמים: $f\in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f^{(k)}}(n)=i^kn^k\hat f(n)$ ובפרט $n^k\hat f(n)\to0$

ההפך: אם $\hat f(n)=o(|n|^{-p})$ וטור פורייה מתכנס ל-f אזי $f\in C^{p-2}$.

מסקנה: $f\in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat f(n)|<\infty$ ובפרט $S_Nf\xrightarrow{u}f$.

רציפות והתכנסות טור המקדמים: $f\in C(\mathbb{T})$ וכן $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat f(n)|<\infty$ $\Leftarrow$ $S_Nf\to f$ במ"ש

תכונות קונבולוציה:

⊛ $(f*e_k)(x)=e^{ikx}\cdot\hat f(k)$ ⊛ $f*g=g*f$

⊛ $f*(g+h)=f*g+f*h$ ⊛ $(cf)*g=c(f*g)$

⊛ $f*g$ תמיד רציפה ⊛ $*$ עם פולינום ממעלה N תמיד תחזיר פולינום ממעלה $\le N$.

⊛ $k*(f*g)=(k*f)*g$

⊛ $\widehat{f*g}(n)=\hat f(n)\cdot\hat g(n)$

לא בחומר

⊛ $|(f*g)(x)|\le\|f\|\cdot\|g\|$

⊛ $f_n,f,g\in R(\mathbb{T})$, $f_n\xrightarrow{L_2}f$ אזי $f_n*g\xrightarrow{L_2}f*g$

טענה: כל גרעין f_n שמקיים: ① $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_n=1$

② $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_n|=\int_0^{2\pi}f_n=1$ (ובפרט $\{f_n\}$ סדרה חסומה), חיובית

③ לכל $\delta\in(0,1)$ מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}f_n\xrightarrow{n\to\infty}0$

יקיים $f_n*f\xrightarrow{u}f$

חדו"א 2 משפטים (+)

<u>תכונות גרעין דיריכלה</u>: (1) לכל $f\in R(\mathbb{T})$: $D_N * f = S_N f$ וכן $\hat{D}_N(n)=\begin{cases}1 & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$

(2) לכל $y\in[-\pi,\pi]$: $|D_N(y)|\le 2N+1$

(3) מתקיים $D_N(y)=\begin{cases}2N+1 & y=0\\ \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)} & y\neq 0\end{cases}$ ⇐ פונ' זוגית, ממשית אך לא חיובית

(4) יש מינימום מקומי ב-N נק', מקס' מקומי ב-N+1 נק'

(5) $|D_N(y)|\le\left|\frac{1}{\sin(y/2)}\right|$ ובפרט $|D_N(y)|\le\frac{\pi}{|y|}$

(6) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(y)dy=1$!

(7) $\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|dx>>>1$!!

<u>התכנסות נק' תחת ליפשיץ מקומי</u>: תהי $f\in R(\mathbb{T})$ ו-$x_0\in\mathbb{T}$ ונניח ש-f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב-x_0, אזי $S_Nf(x_0)\xrightarrow{N\to\infty}f(x_0)$

<u>תכונות גרעין פייר</u>: ① $F_N(y)=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((\frac{N+1}{2})y)}{\sin(y/2)}\right)^2$ - חיובי וממשי.

"גרעין טוב"

② $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N=1$

③ $\sigma_N f=f*F_N$

④ $\hat{F}_N(n)=\begin{cases}1-\frac{|n|}{N+1} & n\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$

⑤ <u>תכונה חשובה</u>: לכל δ ולכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $N>N_0$: $\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}F_N(x)dx\le\varepsilon$

<u>משפט פייר</u>: $f\in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_Nf\xrightarrow{u}f$.
בנוסף אם $f\in R(\mathbb{T})$, בנק' בה f רציפה מימין ומשמאל מתקיים: $\sigma_Nf(x)\to\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$
בפרט יש שאיפה נק' ל-f בנק' רציפות.

<u>מסקנה</u>: $f\in R(\mathbb{T})$ עם קפיצות חל' ב-x ונניח ש-$S_Nf(x)\to C$. אזי $C=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

<u>יחידות</u>: $f,g\in C(\mathbb{T})$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ $\hat{f}(n)=\hat{g}(n)$ ⇐ $f=g$.

<u>טענה</u>: $\boxed{\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}}$ ← יחושב בעזרת נוסחת גרעין דיריכלה.

<u>טענה</u>: יהי $\alpha\notin\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$

טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

<u>למה</u>: $|x_j-y_j|\le\|x-y\|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\le\sqrt{n}\|x-y\|$

<u>מסקנה</u>: $x_i^{(m)}\in\mathbb{R}$ סדרות כאשר $i=1,..,n$ ולכל $m\in\mathbb{N}$ נסמן $\mathbb{R}^n\ni x_m=(x_1^{(m)},..,x_n^{(m)})$
אזי לכל i מתקיים $\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}=y_i$ ⟺ עבור $y=(y_1,..,y_n)$ $\lim_{m\to\infty}\|x_m-y\|=0$.

<u>הנורמות שקולות</u>: קיימים קבועים c_1,c_2 כך ש- $c_1\|x\|_2\le\|x\|_1\le c_2\|x\|_2$

__קב' פתוחות:__ (1) איחוד של פתוחות פתוח. (3) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ פתוחות.

(2) חיתוך של סופי של פתוחות פתוח.

__טענה:__ $A\subset\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{int}A=\cup A'$ כאשר $A'\subset A$ פתוחות.

__קב' סגורה:__ $A\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה $\Leftrightarrow$ $A=\bar{A}$

__נק' הצטברות:__ $A\subset\mathbb{R}^n$. $x\in\mathbb{R}^n$ נק' הצטברות של A $\Leftrightarrow$ קיימת סדרה של איברים שונים $\{x_k\}\subset A\setminus\{x\}$ כך ש $x_k\to x$ (אם A אינסופית).

__BW:__ $\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$ חסומה, אז יש לה ת"ס מתכנסת.

__$\Leftarrow$:__ כל קב' חסומה אינסופית יש נק' הצטברות.

__קומפקטיות שקולה לסגירות סדרתית:__ קב' היא קומפקטית $\Leftrightarrow$ לכל סדרה של איברים בקב' יש ת"ס מתכנסת שאיבר בסדרה.

__לקומפקט יש תת כיסוי סופי:__ קב' A היא קומפקטית $\Leftrightarrow$ לכל כיסוי A ע"י קב' פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קיים N וקיימות $\alpha_1,..,\alpha_N$ כך ש- $A=\bigcup_{i=1}^{N}U_{\alpha_i}$.

__למה של קנטור:__ סדרה יורדת של קב' קומפקטיות $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ מקיימות $\cap K_i\neq\emptyset$

__רציפות ε,δ:__ $A\subset\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^m$. f רציפה ב- $x_0\in A$ $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שכל $x\in B(x_0,\delta)\cap A$ מתקיים $f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$

__רציפות בקואורדינטות:__ $f=(f_1,..,f_m):A\to\mathbb{R}^m$ רציפה $\Leftrightarrow$ f_i רציפה לכל $i=1,..,m$

__משפט קנטור:__ $A\subset\mathbb{R}^n$ קומפקט ו- $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה אז f רציפה במ"ש.

__ויירשטראס:__ $K\subset\mathbb{R}^n$ קומפקט, $f:K\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ומשיגה את חסמיה.

__טענה:__ $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה ו- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקט, אזי $B=f(A)\subseteq\mathbb{R}^m$ גם קומפקט.

__תכונת דרבו על קשירה פוליגונית:__ $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה ו- A קשירה פוליג'. יהיו $x,y\in A$ ו- $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)<c<f(y)$ אזי קיים $z\in A$ כך ש- $f(z)=c$.

__טענה:__ כל קב' פתוחה וקשירה מסילתית היא גם קשירה פוליגונית.

__מסקנה:__ קב' $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קשירה $\Leftrightarrow$ כל f קבועה מקומית עליה קבועה ממש $\Leftrightarrow$ כל f רציפה עליה מקיימת תכונת דרבו.

__גזירות חלקיות חסומות $\Leftarrow$ רציפות:__ $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}$. f גזירה חלקית לפי כל משתנה $x_1,..,x_n$ (בכל התחום) וכן הנגזרות החלקיות חסומות $\Leftarrow$ f רציפה.

__דיפרנציאביליות $\Leftarrow$ גזירות כיווניות:__ $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^m$, $x_0\in U$ כך ש f דיפ' ב- x_0. אזי לכל v קיים $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ומתקיים: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=D_f(x_0)\cdot v}$

חדו"א 2 מושגים (5)

דיפרנציאביליות ⇔ דיפ' כל קואורדינטה: אם $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא $f=(f_1,..,f_m)^T$ אזי
היא דיפרנציאבילית ⇔ כל f_i דיפ' ומתקיים:

$$D_f=\begin{bmatrix}\cdots & \nabla f_1 & \cdots\\ & \vdots & \\ \cdots & \nabla f_m & \cdots\end{bmatrix}$$

תכונות הדיפרנציאל: ⊛ $f\equiv\vec{c}\in\mathbb{R}^m$ ב-U ⇐ $\forall x\in U\ D_f(x)=0$ ⊛ $f(x)=Ax$ ⇐ $D_f(x)=A$ לכל x.

⊛ U פתוחה וקשירה מסילתית וכן $D_f(x)=0$ לכל $x\in U$ ⇐ $f\equiv\vec{c}$ על U.

⊛ $D_f=A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ על U ו-U פתוחה וקשירה מסילתית אזי על U מתקיים: $f(x)=Ax+c$

⊛ $D_{f+g}(x)=D_f(x)+D_g(x)$

⊛ דיפרנציאביליות ⇐ רציפות.

C^1 ⇔ נגזרות חלקיות רציפות: $f:U\to\mathbb{R}^m$ כאשר U פתוחה. אזי $f\in C^1(U)\iff\forall i:\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\in C(U)$

כלל השרשרת: $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $V\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות, $f:U\to V$, $g:V\to\mathbb{R}^k$. נניח f דיפ' ב-x_0
ו-g דיפ' ב-$y_0=f(x_0)$. אזי $h=g\circ f:U\to\mathbb{R}^k$ דיפ' ב-x_0 ומתקיים

$$\boxed{D_h(x_0)=D_g(f(x_0))\cdot D_f(x_0)}\ \Leftarrow\ \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x_0))\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0)$$

בפרט ⊛ $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ נקבל: $h'(t)=\langle\nabla g(f(t)),g'(t)\rangle$

למה: תהי $C\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^n$, אזי $\|Cx\|\le\|C\|_{HS}\|x\|$

הגרדיאנט מאונך לקווי הרמה: $f:U\to\mathbb{R}$ דיפ' ב-x_0. נסמן $S=\{x\mid f(x)=f(x_0)\}$.
אזי לכל עקומה $\gamma:[-1,1]\to S$ המקיימת $\gamma(0)=x_0$ מתקיים: $\nabla f(x_0)\perp\gamma'(0)$

מינימום ומקסימום ונק' קריטית: $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. נניח ש-f גזירה ברציפות.
אזי עבור $x_0\in U$ שהיא נק' מקסימום מקומי או מינימום מקומי מתקיים $\nabla f(x_0)=0$.

משפט שוורץ: $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $(x_0,y_0)\in U$ כך שקיימות
$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)$ בסביבה של (x_0,y_0). ונניח ששתיהן גזירות ברציפות
ב-(x_0,y_0), אזי מתקיים: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$ ($\Leftarrow$ $\nabla^2 f$ סימטרית)

הגדרה: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{R}^n$, אנו רוצים לגזור פעמיים את $g(t)=f(v_0+tu)$
אזי: $g''(t)=u^T\nabla^2 f(v_0+tu)u$

משפט לגרנז'

מיון נק' קריטיות - משפט לגרנז': $f:U\to\mathbb{R}$, פונ' C^2, $a\in U$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה. a נק' קריטית לא מנוונת ($\det \nabla^2 f(a)\neq 0$) ונסמן $\Delta=\partial_{xx}f(a)\partial_{yy}f(a)-(\partial_{xy}f(a))^2$. אזי:

1. אם $\Delta<0$ אז a אוכף ואינה קיצון מקומי
2. אם $\Delta>0$ אז נ"ג אותו סימן, אזי a נק' קיצון:

(א) אם $\partial_{xx}f(a)>0$ אז a מינ' מקומי

(ב) אם $\partial_{xx}f(a)<0$ אז a מקס' מקומי.

טור טיילור בהרבה משתנים: $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וגזירה $m+1$ פעמים ברציפות ציר $x_0\in A$. אזי עבור $\|u\|=1$ מתקיים:

$$f(x_0+hu)=\sum_{k=0}^{m}\frac{h^k}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x_0)u_{i_1}\cdots u_{i_k}+R_{m,u}(x_0,h)$$

כאשר $R_{m,u}(x_0,h)\in o(|h|^m)$. השארית ע"פ לגרנז':

$$R_{m,u}(x_0,h)=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x_{i_{m+1}}\cdots\partial x_{i_1}}(x_0+h'u)u_{i_1}\cdots u_{i_{m+1}}$$