חדווא תרגול 9

טאובר: תהי $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש- $ka_k\to 0$ ($a_k=o(\frac{1}{k})$) אזי:

(*) $\sum a_k$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum a_k$ מתכנס.

הוכחה - רק כיוון $\boxed{\Leftarrow}$

כלומר יש $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ כך ש- $f(r)=\sum a_k r^k$ וקיים הגבול $L=\lim_{r\to 1^-} f(r)$

רוצי להוכיח $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ נגדיר הסדרה: $d_N=\sum_{k=0}^{N} a_k-\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_N^k$

כאשר הסדרה $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ נתונה ע"י $x_m=1-\frac{1}{m}$.

נוכיח ש- $d_n\to 0$.

$$d_N=\underbrace{\sum^{N} a_k(1-x_N^k)}_{A_N}+\underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k\cdot x_N^k}_{B_N}$$

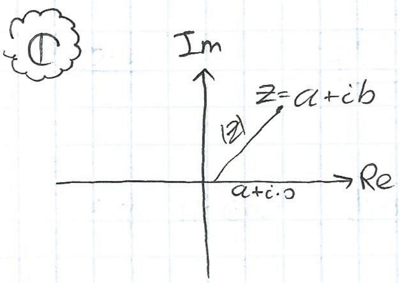
מברנולי: $x_N^k=(1-\frac{1}{N})^k\geq 1-\frac{k}{N}$ $\Leftarrow$ $1-x_N^k\leq\frac{k}{N}$

$$A_N=\sum^{N} a_k(1-x_N^k)\leq\sum^{N}\frac{ka_k}{N}=\frac{\sum^{N} ka_k}{N}$$

הסדרה $ka_k\to 0$ ולכן מצ'זארו $A_N\to 0$.

$$|B_N|=\left|\sum_{k>N}^{\infty} a_k x_N^k\right|\leq\sum_{k>N}^{k}|a_k|\frac{x_N^k}{k}\leq\underbrace{\sup_{k>N}|ka_k|}_{S_N}\cdot\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{x_N^k}{k}\leq S_N\cdot\frac{x_N^{N+1}}{N+1}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}x_N^k}_{\frac{1}{1-x_N}=N}\leq S_N\cdot\frac{N}{N+1}\cdot x_N^{N+1}\Rightarrow 0$$

$S_N\to 0$, $\frac{N}{N+1}\to 1$, $x_N^{N+1}\to 1/e$



מרוכבים:

צמוד: $\bar{z}=\overline{(a+ib)}=a-ib$

$\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ $\wedge$ $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

$|z|^2=z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$

סדרות מרוכבים:

נרשום סדרת מרוכבים $z_n=a_n+ib_n$

$a_n\to a\in\mathbb{R}$, $b_n\to b\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $|z_n-(a+ib)|\to 0$. כותב $z_n\xrightarrow{def} z$.

טור: $\sum^{\infty} c_k z^k$ מתכנס, ופי $\sum^{M} c_k z^k$.

משפט: נניח ש- $\sum c_k z^k$ מתכנס בנק' z המקיימת $|z|=R$, נניח $r<R$.

$D_r=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq r\}$, אז הטור מתכנס בהחלט, במ"ש ב- D_r.

נוסחת קושי הדמרד: $R=\left(\overline{\lim}\,|c_k|^{1/k}\right)^{-1}$.

עפ"י ע' הקטע $[0,2\pi]$
רק שהפונ' מוגדרת
על $0,2\pi$

פונקציות מחזוריות:

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ עם מחזור 2π.

את אוסף הפונ' האלו שהן גם אינטגרביליות ב-$[0,2\pi]$ מסמנים ב- $R(\mathbb{T})$

הגדרה: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ לו סדרת הפונ': $e_n(t)=e^{int}$

צירוף לינארי של איברי e_n עם מקדמים מרוכבים נקרא פולינום טריגונומטרי:

$P(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t)$. למה חושבים את זה ל-$N$- ו-$N$- ל-$2N$?

כי: $\cos(nt)=\frac{1}{2}(e_n(t)+e_{-n}(t))$, $\sin(nt)=\frac{1}{2}(e_n(t)-e_{-n}(t))$.

מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g}(t)dt$

נורמת L_2: $\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$

תכונות:

① $\overline{\langle f,g\rangle}=\langle g,f\rangle$

② לינאריות (אם שמים קבוע ליד g הוא יוצא עם צמוד!)

③ $0\lneq\langle f,f\rangle\in\mathbb{R}$. $\langle f,f\rangle=0 \iff \int_0^{2\pi}|f|^2=0$

④ א' שוויון קושי שוורץ (C.S): $|\langle f,g\rangle|\le\|f\|\cdot\|g\|$

⑤ א"ש משולש: $\big|\|f\|-\|g\|\big|\le\|f\mp g\|\le\|f\|+\|g\|$

צלע גדולה מההפרש אורכי האחרות — צלע קטנה מסכום 2 האחרות

אורתוגונליות: (כמו ב- V את $R(\mathbb{T})$)

הגדרה: $f,g\in V$. $f\perp g$, או "f ניצבת ל-g", אם $\langle f,g\rangle=0$

משפט פיתגורס: אם $f\perp g$ אז $\|f+g\|^2=\|f\|+\|g\|$

תזכורת: $\langle e_n,e_m\rangle=\delta_{n,m}$.

תרגיל: $P=\sum_{|n|\le N} c_n e_n$

יהי P פונ' טריגו' מעלה N. אזי המקדמים נקבעים ביחידות: $c_n=\langle P,e_n\rangle$

ובנוסף, אם $Q=\sum_{|n|\le N} d_n e_n$, אזי $\langle P,Q\rangle=\sum_{|n|\le N} c_n\overline{d_n}$ (המספר פרסבל ל-P ו-Q טריגו' אם מגזים $P=Q$)

$\|P\|^2=\sum|c_n|^2$

פתרון:

$\langle P,e_n\rangle=\langle\sum_{m=-N}^{N} c_m e_m, e_n\rangle=\sum_{|m|\le N} c_m\cdot\overbrace{\langle e_m,e_n\rangle}^{\delta_{m,n}}=c_n$

$\langle P,Q\rangle=\langle\sum_{|m|\le N} c_m e_m,\sum_{|n|\le N} d_n e_n\rangle=\sum_{m,n=-N}^{N} c_m\overline{d_n}\cdot\delta_{n,m}=\sum_{|m|\le N} c_m\cdot\overline{d_m}$

בפרט אם $P=Q$ אז $c_n=d_n$ וגם: $\|P\|^2=\sum c_n\cdot\overline{c_n}=\sum_{|n|\le k}|c_n|^2$

המשך תרגול 9 חדו"א

תרגיל: הוכיחו את הזהויות לסכום זויות של $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$$
$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$
$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

מהשוואת חלקים ממשיים ומרוכבים נקבל שוויון.

תרגיל: עבור $x\in(0,2\pi)$ הוכיחו את הזהות הבאה:

$$\boxed{S=\sum_{n=0}^{N}\sin(nx)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos((N+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}}}$$

$$S=\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N}e^{inx}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right)=\frac{1}{|1-e^{ix}|^2}\left(-\sin((N+1)x)+\sin x+\sin(Nx)\right)=$$

$$(1-e^{i(N+1)x})(1-e^{-ix})=1-e^{i(N+1)x}-e^{-ix}+e^{inx}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{|1-e^{ix}|^2}\left(2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x-2\sin\tfrac{x}{2}\cdot\cos((N+\tfrac{1}{2})x)\right)=\frac{2\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}-\cos((N+\frac{1}{2})x))}{(2\sin\frac{x}{2})^2}=\blacksquare$$

$$|1-e^{ix}|^2=(1-\cos x)^2+\sin^2x=1-2\cos x+1=2(\underbrace{1-\cos x}_{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}})=$$
$$=2(2\sin^2\tfrac{x}{2})$$

(!) נשתמש בזה הרבה בשביל הוכחת התכנסות במ"ש בדירכלה בקטע $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$.

פונקציות מרוכבות של משתנה ממשי:

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$
$$\varphi:u+iv\ ,\ u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

מתקיים:
$$\varphi'=u'+iv'\ ,\ \int_a^b\varphi=\int_a^b u+i\int_a^b v$$

דוגמא: $\varphi_\alpha(t)=e^{i\alpha t}$ (*) ($\alpha\in\mathbb{R}$ fixed).

$$\varphi'(t)=(\cos(\alpha t)+i\sin(\alpha t))'=-\alpha\sin(\alpha t)+i\alpha\cos\alpha t=i\alpha(\cos\alpha t+i\sin\alpha t)=i\alpha\varphi(t)$$

$\Leftarrow$ $\varphi'=i\alpha\cdot\varphi$.

(*) חשבו $\int_0^{2\pi}e^{int}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi}e^{int}\underset{n\neq0\text{ לכל}}{=}\frac{e^{int}}{in}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=0$$

ל- $n=0$:
$$\int_0^{2\pi}e^{i0t}dt=2\pi$$

(*) הוכיחו שלכל $m,n\ge0$ מתקיים:
$$I_{m,n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx$$

$$I_{m,n}=\delta_{n,m}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(1+\delta_{n,0})$$

תחילה:
$$\cos(nx)=(e^{inx}+e^{-inx})\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$\cos(mx)=\ \ldots$$

$$\cos(nx)\cdot\cos(mx)=\tfrac{1}{4}(e^{i(m+n)x}+e^{i(m-n)x}+e^{i(n-m)x}+e^{i(-n-m)x})$$

$\Leftarrow$ אם $m\neq n$: כל האקספוננטים שונים מ-0 ולכן $I_{m,n}=0$

$\Leftarrow$ אם $m=n\neq0$: $I_{n,n}=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ $m=n=0$: $I_{n,n}=\frac{1}{2\pi}\int 1=1$

$\blacksquare$

הערה: כיוון שמתקיים $e^{int}=\cos(nt)+i\sin(nt)$ מגדירים $A_0=\hat f(0)$ ולכל $n\geq 1$:

$A_n=\hat f(n)+\hat f(-n)$, $B_n=\hat f(n)-\hat f(-n)$ ומתקיים:

$$(S_Nf)(t)=\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{int}=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{N}(iB_n)\sin(nt)$$

תרגיל: ① אם $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ אזי: $\hat f(n)=\overline{\hat f(-n)}$ לכל n, בפרט ל-$n\geq1$: $A_n\in\mathbb{R}$, $iB_n\in\mathbb{R}$

② אם f מדומה אז לכל n: $\hat f(n)=-\overline{\hat f(-n)}$.

③ f ממשית וזוגית $\Leftarrow$ $\hat f(n)\in\mathbb{R}$ ובנוסף $\hat f(n)=\hat f(-n)$ ($B_n\equiv 0$)

④ f ממשית ואי זוגית $\Leftarrow$ $\hat f(n)\in i\mathbb{R}$

הוכחה: ① בהרצאה

② $$\overline{\hat f(-n)}=\overline{\langle f,e_{-n}\rangle}=\langle \bar f,\overline{e_{-n}}\rangle=\langle -f,e_n\rangle=-\langle f,e_n\rangle=-\hat f(n)$$

$\overline{\int k}=\int\bar k$ (אפשר לפי הגדרה

על סכום רימן - על סכומים זה נכון.)

③ f ממשית וכן $\hat f(-n)=\overline{\hat f(n)}$. כעת:

$$\hat f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}=\Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\cos(nt)}_{\in\mathbb{R}}\Big)+i\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{זוגית}}\underbrace{\sin(nt)}_{\text{אי זוגית}}}_{\text{אי זוגית}}\Big)\overset{\in\mathbb{R}}{=}$$

פונ' אי זוגית על הקטע סימטרי - האינטגרל שלה 0

"הטור של פונ'
ממשית זוגית
(מורכב מ cos" ←

לכן $\hat f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\in\mathbb{R}$ בפרט.

$$B_n=\hat f(n)-\hat f(-n)\overset{\text{פונק' ממשית}}{=}\hat f(n)-\overline{\hat f(n)}\underset{\hat f(n)\in\mathbb{R}}{=}\hat f(n)-\hat f(n)=0\ \checkmark$$

$(A_n=2\hat f(n))$

④ דומה.

תרגיל: הוכיחו ש-

$$|\sin x|\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$$

פתרון:

מ-③ מתרגיל הקודם, הטור אכן מכיל רק מקדמים של cos ($B_n\equiv0$)

בנוסף ל- $n\geq1$ מתקיים: $A_n=2\hat f(n)$. צ"ל (1) $A_0=\frac{2}{\pi}$

$n\geq1 \Rightarrow \hat f(n)=\frac{A_n}{2}=\ldots$ (2)

$$A_0=\hat f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cdot 1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\overset{|\sin x|=\sin x\ \text{בתחום}}{=}\frac{2}{\pi}\quad\checkmark$$

$$n\geq1,\quad \hat f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cdot e^{-inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos(nx)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos(nx)=$$

החלק של ה- sin לא

פונ' אי זוגית לכן האינטגרל מתאפס.

זהות
מכפלה

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin((n+1)x)+\sin((1-n)x)}{2}\underset{\substack{|n|\neq1\\ \text{עבור}}}{=}\frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}-\frac{\cos((1-n)x)}{1-n}\Big)=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{(-1)^n+1}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}-1}{n-1}\Big)=$$

$$=\frac{n-1+(-1)^n(n-1)-(n+1)+(-1)^{n-1}(n+1)}{2\pi(n^2-1)}=\frac{-2-(-1)^n+(-1)^{n-1}}{2\pi}=\frac{1+(-1)^n}{-\pi(n^2-1)}$$

$$\Rightarrow\hat f(n)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1} & n\ \text{זוגי}\\ 0 & n\ \text{אי זוגי}\end{cases}$$