חדו"א תרגול 8

מבחני ודיריכלה לטורי פונקציות

<u>למה (סכימה בחלקים)</u>: נניח ש- $\{b_k\}$, $\{a_k\}$ סדרות, $B_k=\sum_{k=1}^{n} b_k$, $B\in\mathbb{R}$

אז לכל $n,p\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k=\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k\cdot(a_k-a_{k+1})-a_{n+1}B_n+a_{n+p}B_{n+p}$$

$b_k=(B_k-B)-(B_{k-1}-B)$ לכן:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k=\sum_{n+1}^{n+p-1}(B_k-B)(a_k-a_{k+1})-a_{n+1}(B_n-B)+a_{n+p}(B_{n+p}-B)$$

נניח ש- $\{b_n\}$, $\{a_n\}$ שתי סדרות פונק' מ- D ל- $\mathbb{R}$.

<u>דיריכלה</u>: אם: (1) $\{\underbrace{\sum_{n=1}^{N} b_n(x)}_{B_N(x)}\}_N$ חסומה במידה אחידה ע"י M ב- D

(2) לכל x, $\{a_n(x)\}_n$ מונוטונית וגם $a_n\xrightarrow{k}0$.

אז: הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- D.

<u>הוכחה</u>: (קריטריון קושי)

למה כרימה בחלקים

$$\left|\sum_{k=n+1}^{k+p} a_k(x)b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=k+1}^{n+p-1} B_k(x)(a_k-a_{k+1})(x)+a_{n+p}B_{n+p}-a_{n+1}B_n\right| \overset{\triangle}{\le}$$

$$\le \sum_{n+1}^{k+p-1}|B_k(x)||(a_k-a_{k+1})(x)|+|a_{n+1}B_n|+|a_{n+p}B_{n+p}| \underset{(1)}{\le} M\left(\sum_{n+1}^{n+p-1}|a_k(x)-a_{k+1}(x)|+|a_{n+1}(x)|+|a_{n+p}(x)|\right)$$

כי a באותו סימן

$$= M\left(|a_{n+p}(x)-a_{n+1}(x)|+|a_{n+1}(x)|+|a_{n+p}(x)|\right)\le M\cdot\sup_{x\in D}\{|a_{n+1}(x)|,|a_{n+p}(x)|\}= \cancel{M\cdot\sup(d}$$

d_n זה המרחק המקסימלי בין הפונ' שמתכנסות במ"ש לגבול שלהן

$$\le M(d_{n+1}+d_{n+p})\xrightarrow[(2)]{n\to\infty}0$$

∎

<u>אבל</u>: אם: (1) הסדרה $\{B_N(x)=\sum_{n=1}^{N} b_n(x)\}_N$ מתכנסת במ"ש ב- D ל- $B(x)$

(2) לכל x, $\{a_n(x)\}_n$ מונוטונית ובנוסף $\{a_n\}$ חסומה במדה אחידה ע"י M

אז $\sum a_n b_n$ מתכנס במ"ש ב- D.

<u>הוכחה</u>: שוב קריטריון קושי:

למה

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{k+p-1}(B_k(x)-B(x))(a_k(x)-a_{k+1}(x))-a_{n+1}(x)(B_n-B)(x)+a_{n+p}(x)(B_{n+p}-B)(x)\right| \overset{\triangle}{\le}$$

$$\le \left(\max_{n\le k\le n+p}|B_k(x)-B(x)|\right)\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_k(x)-a_{k+1}(x)|+|a_{n+1}(x)|+|a_{n+p}(x)|\right)=$$

$$=(\max\ldots)\left(|a_{n+1}(x)-a_{n+p}(x)|+|a_{n+1}(x)|+|a_{n+p}(x)|\right)\le 4M\cdot\max_{n\le k\le n+p}\{\overbrace{\sup_{x\in D}|B_k(x)-B(x)|}^{d_k}\}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

∎

בקורס: $(-1,1)$ -ב :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$ (כי $\sum^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum(n+1)x^n - \sum x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$$

$$\circledast\ \boxed{\left(-\ln(1-x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}}$$

$\circledast$ פתרונות e^{-x^2} לטור טיילור:

$$\forall y\in\mathbb{R}.\quad e^y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y=-x^2 :\quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$$

נשתמש בשברים חלקיים:

$$⓪\ f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{x}{(-2x-1)(x-1)} = \frac{-x}{2}\cdot\left(\frac{1}{(x-1)(x+\frac{1}{2})}\right) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}}$$

ולכן:

$$f(x) = -A\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{2B}{1+2x} =$$

$$= -A\sum_0^{\infty} x^n + 2B\sum_0^{\infty}(-2x)^n$$

$$① \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$$

נגדיר:

$$g(x) = x^3 h(x) = \sum_0^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+3)!} = \sum_3^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad h(x) = S(x-2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}$$

$$= e^x - \sum_{n=0}^{2}\frac{x^n}{n!} = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{x^3}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \ldots$$

$$② \ f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad f(x) = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$(\textstyle\sum x^n)'$$

$$③ \ S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = x(1+2x+3x^2+\ldots) = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = x\,\cancel{\left(1+\sum_{n=0} n x^{n-1}\right)} =$$

$$= \cancel{x\left(1+\frac{1}{(1-x)^2}\right)}\ \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$④ \ \sum\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n$$

$$\frac{n^2+1}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \Rightarrow f(x) = S(2x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n =$$

$$\cancel{= \sum\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}\frac{x^n}{(n-2)!}} \qquad = x^0 + 2x + \sum_{n=2}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}\frac{x^n}{(n-2)!}$$

הכושך חדו"א תרגול 8:

משפט אבל על רדיוס:

לכל טור $\sum a_k x^k$ יש מספר $0 \le R' \le \infty$ כך שהטור מתכנס ב-$(-R,R)$ ומתבדר בחוץ, ובכל תת קטע קומפקטי יש התכנסות בהחלט ובמ"ש ופונ' רציפה.

נוסחת הדמרד: $R = \left(\overline{\lim} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$

בנוסף: אם $\exists \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ אז הוא שווה ל-R.

תרגיל: מצאו רדיוס התכנסות של $\sum \frac{(3^n+(-2)^n)}{n} x^n$

פתרון:

הטור הוא סכום של הטורים: $\sum \frac{(-2)^n}{n} \cdot x^n$, $\sum \frac{3^n}{n} x^n$ שמתכנסים עם רדיוסים $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ בהתאמה. ב-$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ בטוח יש התכנסות!

מכיוון שבין $\frac{1}{2}$ ל-$\frac{1}{3}$ אין התכנסות (סכום של מתכנס ומתבדר), מאוחר הרי שהרדיוס הוא $\frac{1}{3}$ ∎

אינטגרציה וגזירה:

טענה: אם ל-$\sum a_k x^k$ יש רדיוס התכנסות R, וב-$(-R,R)$ מתקיים $f(x)=\sum a_k x^k$ אז ב-$(-R,R)$ גם מתקיים:

$$f'(x)=\sum k a_k x^{k-1}, \quad F(x)=\sum a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad F'(x)=f(x)$$

ורדיוס ההתכנסות של F ו-f' הוא R.

הסבר שהרדיוס נשמר: $\overline{\lim}|a_k|^{1/k} = \overline{\lim}|k a_k|^{1/k} = \overline{\lim}\left|\frac{a_k}{k+1}\right|^{1/(k+1)}$

נובע כי במקרה זה f גזירה מכל סדר!

משפט: לכל $|x|<R$ וגם $m \in \mathbb{N}$:

$$f^{(m)}(x) = \sum_k a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1-m) x^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k$$

בפרט $f^{(m)}(0) = m! a_m$ ולכן $a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$. כלומר $\sum a_k x^k$ הוא לא סתם טור חזקות שמתכנס ל-f, אלא זה טור טיילור של f (היחידות טור טיילור!)

למשל: $\sum(-1)^k$ לא מתכנס, אבל $\sum(-1)^k r^k = \sum(-r)^k = \frac{1}{1+r}$

כן מתכנס לכל $r\in(0,1)$ וקיים $\exists \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$ לכן $\sum(-1)^k \overset{(A)}{=} \frac{1}{2}$

<u>סכימה לפי צ'זארו</u>: סכום לפי צ'זארו $S_n = \sum^n a_k$ אם קיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_1+\dots+S_n}{n}\right) \overset{(C)}{=} \sum a_k$

<u>תזכורת משפט צ'זארו</u>: אם $\sum a_k$ מתכנס אז $\sum a_k$ מתכנס לפי צ'זארו.

<u>משפט</u>: טור מתכנס ⇐ מתכנס צ'זארו ⇐ מתכנס אבל.

<u>טענה</u>: אם $\sum a_k$ מתכנס צ'זארו, אזי $\frac{a_n}{n}\to 0$.

<u>הוכחה</u>: <u>נסמן</u>: $S_n = \sum^n a_k$ ו- $\sigma_n = \sum^n S_k$. נתון $\frac{\sigma_n}{n} \to L \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1} - \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} L-L-L+L = 0$$

המשך 2 תרגול 8 חדו״א:

משפטי הקצוות:

נ״ח שהרדיוס של $\sum a_k x^k$ הוא $0<R$.

(הטור לא מתכנס ב- $x=R$ או ב- $x=-R$) $\Leftarrow$ הטור לא מתכנס במ״ש ב- $(-R,R)$

(כן מתכנס ב- $x=R$) $\Leftarrow$ מתכנס במ״ש ב- $[0,R]$

מסקנה 1: אם $f=\sum a_k x^k$ ב- $(-R,R)$ והטור מתכנס ב- $x=R$,
אז אפשר להמשיך את f בנק׳ R לפי רציפות.
ואז: $\sum^\infty a_k R^k = f(R) = \lim_{x\to R^-} f(x)$

סוגי סכימה:

מסקנה: נ״ח ש- $\sum^\infty a_k$ מתכנס. אז $\boxed{\lim_{r\to 1^-}\left(\sum^\infty a_k r^k\right) = \sum^\infty a_k}$

כלומר אפשר להחליף סדר של גבול $\infty\to N$ (של הטור) עם $r\to 1^-$.

לדוגמא: $\left[-\ln(1+x) = \sum \frac{(-x)^n}{n}\right]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{-(-x)^n}{n} = \sum \underbrace{a_n}_{a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}} x^n$$
$$= x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots$$

רדיוס ההתכנסות $=1$. נשים לב $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ולכן מלייבניץ מתכנס.

לכן מהמסקנה:
$$\ln 2 = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \sum a_n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$$
רציפ׳ $\ln$

נוסחה ל- arctan:
$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum^\infty (-x^2)^n = (\arctan)'$$
$$C + \arctan(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \to C=0$$

באינטגרציה תחום נכון: $(-1,1)$ מה עם הקצוות? בנק׳ $x=-1$ הטור ~~לא~~
מתכנס ~~[...]~~
בנק׳ $x=1$ כן מתכנס, לכן:
לכן במ״ש ב- $[-1,1]$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
■

הבהרה: לטור $\sum a_k$ אומרים שהוא מתכנס לפי אבל אם:

(1) $\forall r\in(0,1)\ \sum^\infty a_k r^k<\infty$ (2) $\exists \lim_{r\to 1^-}\left(\sum^\infty a_k r^k\right) \overset{(*)}{=} \sum^\infty a_k$

המסקנה שראינו בעצם אומרת שטור מתכנס $\Leftarrow$ מתכנס לפי אבל ולאותו מספר!

פוזמאן:

$$e^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

מתכנס בכל המישור (למשל כי אם נקח כנ לינק' עם ד'ר Re, זה מתכנס שם ולכן מתכנס בכל רדיוס קטן ממנה).

ראינו גם ש- $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

נוסחת אוילר: $\theta \in \mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

מהנוסחה נעזרה (הכל):

* $(r_1 e^{i\theta_1})\cdot(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
* $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

תרגיל: ל- $z = 1+i$, חשבו את $z^2, z^{-1}, \bar{z}, |z|, iz$

* $z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
* $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
* $\bar{z} = 1 - i$
* $|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
* $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
* $iz = -1 + i$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 + i\cdot 1$

טענה: אם z על מעגל היחידה אזי $\bar{z} = z^{-1}$

נכון כי על מעגל היחידה $|z| = 1$ ונעשה לזה אם ורק אם!

תרגיל: $\boxed{\overline{e^z} = e^{\bar{z}}}$

מותר כי נבבר עצמו של הסכומים החלקיים דבסכום סופי טריוויאלי)

$$\overline{e^z} = \overline{\sum^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum^{\infty} \left(\overline{\frac{z^k}{k!}}\right) = \sum^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = e^{\bar{z}} \quad \checkmark$$

דרך נוספת: $z = a+ib$. אזי: $\overline{e^z} = \overline{e^{a+bi}} = \overline{e^a \cdot e^{ib}} = \overline{e^a} \cdot \overline{e^{ib}} = e^a \cdot e^{-ib} = e^{\bar{z}} \quad \checkmark$

טענה: אם $z = a+bi$ אזי $|e^z| = e^a$

$$|e^z| = |e^a \cdot e^{ib}| = e^a \cdot |e^{ib}|, \quad |e^{ib}| = 1$$

מדומה טהור על מעגל היחידה!

דרך נוספת: $\checkmark \; |e^z|^2 = \overline{e^z} \cdot e^z = e^{\bar{z}} \cdot e^z = e^{\bar{z}+z} = e^{2a}$

תרגיל: פתרו את המשוואה $e^z = 1 = e^{0+i0}$.

$z = a+ib \Leftarrow$

האורך $=1$

$$e^z = e^a \cdot e^{ib} \Rightarrow e^a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$1 = e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b) \Rightarrow \boxed{b = 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}}$$