

תראו 6 חדול

סדרות וטורי פונקציות

תרגיל 6.1

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt, x \in [0, a] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{כאשר } f_0 \in R([0, a]) \quad a \in \mathbb{R}$$

$$f_n \xrightarrow{u} 0$$

הוכחה: f_0 אינטגרלית, נבחר M (על f_0) M $(\forall x, |f_0(x)| \leq M)$

$$|f_1(x)| = \left| \int_0^x f_0(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_0(t)| dt \leq \int_0^x M dt = M \cdot x$$

$$|f_2(x)| = \left| \int_0^x f_1(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_1(t)| dt \leq \int_0^x M \cdot t dt = M \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\forall x \in [0, a] \quad |f_n(x)| \leq M \cdot \frac{x^n}{n!} \leq \frac{M \cdot a^n}{n!}$$

(כאשר $d_n = \frac{M \cdot a^n}{n!}$)

$$\Rightarrow |f_n(x) - 0| \leq \frac{M \cdot a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

⚠️ אם f_0 איננו אינטגרלית, הוכחה לא עובדת, ואכן זה לא תמיד נכון! (לדוגמה $f_0(x) = 1/x$)

$$f_n \xrightarrow{u} f \iff f_n \xrightarrow{u(a,b)} f \quad : f_n \rightarrow f \text{ ב- } [a, b] \text{ כלשהו}$$

הוכחה: $\Rightarrow$ טריוויאלי - נמצא N כזה ש $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ לכל $x \in [a, b]$.

$$\Leftarrow \text{ע"י } f_n \xrightarrow{u(a,b)} f \text{ ויהי } \epsilon > 0. \text{ אזי } \exists N_1 \text{ כך ש-}$$

$$\forall n \geq N_1, \forall x \in (a, b) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a \quad |f_n(a) - f(a)| < \epsilon$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b \quad |f_n(b) - f(b)| < \epsilon$$

$$(M = \sup \{M_\alpha\} \iff M = \sup A \quad \text{כאשר } M_\alpha = \sup A_\alpha \quad \text{ו-} \quad A = \bigcup A_\alpha)$$

$$d_n = \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f(x)| = \max \left\{ \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)| \right\}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max \{N_1, N_a, N_b\} \Rightarrow d_n < \epsilon$$

קריטריון קושי להתכנסות סדרה:

$$d_{n,m} = \sup |f_n(x) - f_m(x)|$$

משפט: $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ מתכנסת סדרה סדרית אם ורק אם $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon$ כך ש-

$$n, m \geq N_\epsilon \Rightarrow \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

(כאשר $d_{n,m} \leq \epsilon$)

$$\text{כאשר } d_{n,m} \leq d_n + d_m \quad (\text{קריטריון קושי})$$

החשבון תרגווי 6 חדו"א

תרגו 9.9:

$f_n \xrightarrow{u} 0$: 1 $f_n(x) = x^n \cdot g(x)$ $g(1)=0, g \in C([0,1])$

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ רציפה

פתרון:

ברק 1: נבחר δ מסוים 1 ופיתר, אזי נכנסת δ ש $|f_n(x)| \leq |g(x)| \leq \varepsilon$

וכאן נקבע: $|g| \leq M, |f_n| \leq M \cdot (1-\delta)^n$

ברק 2: נבחר x , הנבחר $\{f_n(x)\}$ שומרת סמן ומתק"פ:

$$|f_{n+1}(x)| = |x^{n+1} \cdot g(x)| \leq |x^n \cdot g(x)| = |f_n(x)|$$

וכן $f_n(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) $g(x) \geq 0$ ויורדת אם $g(x) \leq 0$. בנוסף הן רציפות.

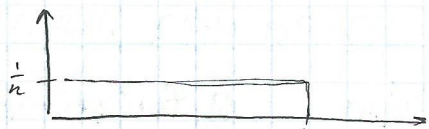
נותר רק לוודא שיש התכנסות נקודתית לפונ' רציפה (רפון האפס):

$x < 1$: $|f_n(x)| = |g(x)| \cdot x^n \rightarrow 0$ $x=1$: $f_n(1)=0 \rightarrow 0$

משפט: $f_n \in R([a,b])$, $f_n \xrightarrow{u} f$ ואם $f \in R([a,b])$ וקטום

$$I_n = \int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f = I$$

$$|I_n - I| = \left| \int_a^b f_n - f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq d_n (b-a)$$



$f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ כזה שאם נבחר נקודתית $\triangle$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$I_n = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty 0 = 0 \quad \text{כל}$$

ת.כ. הנקודה הזו היא נקודה שבה f_n אינו מתכנסת נקודתית

משפט - נצטרך אינטגרליות: $f_n, \psi: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ וכל n האינטגרל הוא אמת

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad [a, b] \quad \text{ע"י חשבון התקום}$$

$$\int_a^\omega \psi \quad \text{נניח ש-} \quad \forall n, \forall x \quad |f_n(x)| \leq \psi(x) \quad \text{והאינטגרל הוא אמת}$$

כא: $b < \omega$ אם $f \in R([a, b])$ ①

② האינטגרל הוא אמת $\int_a^\omega f$ מתקיים ונקבל $\int_a^\omega f = \lim_n \int_a^\omega f_n (\leq \int_a^\omega \psi)$

תרגו 9.10: $f_n(x) = x \cdot n^\alpha \cdot e^{-nx}$, $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ וכל n $\int_0^1 f_n = I_n$

① ואם $\alpha \in \mathbb{R}$ $f_n \xrightarrow{u} f$

② ואם $\alpha \in \mathbb{R}$ ניתן להוכיח ש $\lim_n I_n = \int_0^1 f$ אם $\alpha < 1$ ו 0 אחרת

הוכחה של תכונות

פתרון תרגיל

$$f_n(x) = x \cdot \frac{n^\alpha}{(e^x)^n} = x \cdot \frac{n^\alpha}{p^n} \quad (e^x = p > 1)$$

: $x \neq 0$

לכן יש התכנסות נקודתית ופונקציות רציפות!

האחרונה: $d_n \rightarrow 0$ או $d_n \not\rightarrow 0$ נחשב את d_n (קבענו, n, α נתון) $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$

$$d_n = \max_{x \in [0,1]} f_n(x)$$

$$f'_n(x) = n^\alpha \cdot e^{-nx} (1-nx) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow d_n = \max \{f_n(0), f_n(1), f_n(\frac{1}{n})\} = \max \left\{ \frac{n^\alpha}{e^n}, \frac{n^{\alpha-1}}{e} \right\} = n^{\alpha-1} \max \left\{ \frac{n}{e^n}, \frac{1}{e} \right\} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{n^{\alpha-1}}{e} = d_n$$

$$\boxed{\alpha < 1} \Leftrightarrow d_n \rightarrow 0$$

② כחור ממשמש - $\alpha < 1$ $I_n \rightarrow 0$

כל אלו שחשקו $d \in (1, \infty)$ ונחשב את $f_n \xrightarrow{u} 0$ ונראה

$I_n \rightarrow 0$ ו

$$I_n = \int_0^1 x \cdot e^{-nx} \cdot n^\alpha = n^\alpha \left(x \cdot \frac{e^{-nx}}{-n} \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{e^{-nx}}{-n} \right) = n^\alpha \left(-\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx} \right) = n^\alpha \left(-\frac{1}{ne^n} + \frac{1}{n} \left(-\frac{e^{-nx}}{n} \right) \Big|_0^1 \right) = n^\alpha \left(-\frac{1}{ne^n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{e^n} - 1 \right) \right)$$

$$\boxed{\alpha < 2} \Leftrightarrow n^{\alpha-2} \rightarrow 0 \Leftrightarrow I_n \rightarrow 0$$

וכעת נשים דם ונראה $\frac{n^\alpha}{ne^n}, \frac{n^\alpha}{n^2 e^n} \rightarrow 0$ וכן

התכנסות גורו ונחשבות

$f_n \in C[a,b]$, $g, f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n: \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \text{א' יש } x_0 \in [a,b] \text{ כך } f_n(x_0) \rightarrow f(x_0) \text{ ו-} f'_n(x_0) \rightarrow f'(x_0) \\ & \text{ב' } f'_n \xrightarrow{u} g \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_{x_0}^x g + Lx, \quad f'_n \xrightarrow{u} g, \quad f'_n \in C[a,b] \text{ מתק"פ}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{x_0}^x f'_n - g \right| \leq \int_{x_0}^x |f'_n - g| \leq |x - x_0| \sup |f'_n - g| \leq (b-a) \sup |f'_n - g|$$

מכאן שכל x הסדרה U_n מתכנסת סימולטנית

טור פונקציות

דיון וטור פונקציות $(U_n) \in C(a,b)$, $U_n \geq 0$ וניה שנקודתית $f = \sum_{k=1}^{\infty} U_k$. ש.כ

$$f \text{ רציפה} \Leftrightarrow \sum U_k(x) \text{ מתכנס בנקודה } f$$

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N U_k(x) \rightarrow f(x)$$

חלק 6 תרגומי - 2

משפט: כיוון M של וירטואליס

$U_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, M_n סדר מספיק נק' -

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad (2) \quad \forall x \in I \quad |U_n(x)| \leq M_n \quad (1)$$

אזי $\sum U_n(x)$ מתכנס בהחלט במ"ש.

סתירה להכרחי: הדיסריון קושי - $\{M_n\}$ נותן N כך ש- $\sum_{k=n}^m M_k < \epsilon$ $m, n \geq N \Rightarrow$

$$\forall x \in I \quad |S_m(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n}^m |U_k(x)| \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{k=n}^m M_k < \epsilon$$

תרגום 8 (6.22)

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^m = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}$$

(1) הוריון של - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n$ (האינטגרל)

$$\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

פתרון:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^m = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{m \ln x^{m-1}}{x} = \frac{-m}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{m-1} = \frac{-m}{n+1} I_{m-1,n}$$

$$I_{m,n} = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}} I_{0,n} \stackrel{\text{נקודות}}{\uparrow} \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}$$

$$x^{-x} = e^{-x \ln x} \stackrel{\text{טוריות}}{\downarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n$$

$$\left(\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n \right)$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ מתכנס במ"ש

בק I - ישירות מפני: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$$\forall n. U_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n \leq \frac{1}{e^n \cdot n!} \stackrel{M_n}{=}$$

בין II - M של וירטואליס - חזקתים ומשלים

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

$$\int_0^1 x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot I_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$U_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, U_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2 x^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$|U_n(x)| = \frac{x^2}{1+n^2 x^2} \leq \frac{x^2}{n^2 x^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$x \rightarrow \infty \quad \sum_{n=1}^N \frac{x^2}{1+n^2 x^2} \xrightarrow{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} \stackrel{(M \text{ בוקן})}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\lim_{x \rightarrow \infty} U_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

5- חידוש אומדן קטנה

תכונה 3

יהי $1 < R$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2}$ מתכנס במ"ש D - $[1, R]$ $\exists$ - $D = (1, \infty)$

במבנה: נגדיר $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n^2}$ ונבדוק בהמשך: $|u'_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{x+n^2} \right| = \left| \frac{1}{x+n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

ע"כ $-$ $[1, \infty)$; $\sum u'_n(x)$ מתכנסת במ"ש g - g (מבוחר M).

בע"כ $x_0 = 1$ מתקיים: $u_n(1) = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ ע"כ $\sum u_n(1)$ מתכנס לנ"ל.

ע"כ $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש D - $[1, R]$.

לפיכך כדעם הוכחה נכונה שההתכנסות הנקודתית D - $[1, \infty)$ היא גם במ"ש!