

תורת אינטגרל 5 חידושים

התכנסות מוחלטת:

משפט: אם $\sum_a^\infty f$ מתכנס בהחלט, אז $\sum_a^\infty f$ מתכנס, ונתקיים:
 $|\sum_a^\infty f| \leq \sum_a^\infty |f|$

תרגיל: עבור איזו ערכי $\alpha \leq 0$ האינטגרל $\sum_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס בהחלט?
 פתרון: לא $\alpha < 1$ מתקיים $|\frac{\sin x}{x^\alpha}| < \frac{1}{x^\alpha}$ וכיון של $\sum_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ מתכנס רק ב- $\alpha > 1$ מתקיים $\sum_1^\infty |\frac{\sin x}{x^\alpha}|$ מתכנס.

$$|\frac{\sin x}{x^\alpha}| \geq \frac{|\sin x|}{x} \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{x} \right) = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x} : \alpha \in (0, 1]$$

מתכנס מתכנס

נכון $\sum_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ מתכנס ההשאה $\sum_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס $\Leftrightarrow \alpha \in (0, 1]$

חבלי ודירנציאל

$f, g: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^1$ ומונולט, g חזיפה.

- ① אם f חסומה ו- $\sum_a^\infty g$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_a^\infty fg$ מתכנס
- ② ציריפה $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0$ ו- $\sum_a^\infty g$ חסומה $\Leftrightarrow \sum_a^\infty fg$ מתכנס

תרגיל: האם $\sum_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס בתנאי? $\alpha \in \mathbb{R}$

א- $(1, \infty)$ - מתכנס בהחלט $\Leftrightarrow$ זה בטעם.

ב- $(-\infty, 1]$ האינטגרל מתכנס. [ת.ק.]

ג- $(0, \infty)$: אין התכנסות בהכרח. נבדוק ציריפה $\Leftrightarrow$ מתכנס בתנאי.

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad g(x) = \sin x \quad G(x) = |\sin x| \leq 2 \quad \sum_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \text{ מתכנס בתנאי!}$$

$$I = \int_1^\infty + \int_1^\infty = I_0 + I_1$$

אינטגרל חזיפה אינטגרל חזיפה

$$I = \int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

בצד התיאור משתנים $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad x'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy \quad \text{מתכנס קודם ל-} \alpha = \frac{1}{2} \text{ האינטגרל מתכנס.}$$

⚠️ הטא התכנסות בהחלט משוער צורת התכנסות מקומית?

בתנאי-ק (הזקוק אוטומט) בהחלט - רק אסטרטגיה שומרת סיון זה מ"צ!

הערה: ד"ר אנטדורציה בחזקת יתרון זהם רק התכנסות התעוא

ואם התכנסות ההחלט!

פונקציה: $\sum_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ מתכנס בתעוא. עשה אנטדורציה בחזקת יתרון:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \left(-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right)_1^{\infty} - \sum_1^{\infty} \cos x \cdot \frac{1}{x^2}$$

$\downarrow$
 $\frac{\cos x}{x^2} < \frac{1}{x^2}$
מתכנס בהחלט!

$\sum_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}$
מתכנס בהחלט

רעיון: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$ ו $\exists N. f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \in \mathbb{R}, f \in C([0, \infty))$

נבחר $f_n(x) = f(nx)$ נקבע n ונחשב P משתנה: $y = nx$

$$I_n = \int_0^1 f(nx) dx = \int_0^n f(y) \frac{1}{n} dy = \frac{1}{n} \cdot \int_0^n f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n J_k$$

$(J_k = \int_{k-1}^k f)$

$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ סדרה 2: $\sum_{k=1}^n J_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ סדרה 1: $J_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L$

(נכית את סדרה 1: יבוס θ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ אז $\forall \epsilon > 0$ יש $N \in \mathbb{N}$

כי $\theta \leftarrow n \leq x \rightleftharpoons L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \leftarrow \int_{k-1}^k f(x) < \int_{k-1}^k (L + \epsilon) \leq L + \epsilon$

קיבענו של $N \leq k$: $|J_k - L| < \epsilon$

תוצאות: נניח $f \in C([0, \infty))$ א. ש. ז. ת, ו- $\int_0^{\infty} f$ מתכנס. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = 0$

$\int_0^1 f(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
מתכנס מתחת

האם אפשר להשתמש בתכונת קוצצ?

היא $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם כן-אז $L = 0$ (קצול) אבל יתרון שאם

(מבטא f חציפה או שזית q $\int_0^{\infty} f$ מתכנס וזר $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$)

תרגיל מתכנס: חקרו התכנסות $\int_1^{\infty} \sin x \log x dx$

נצייר $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = x \log x$ מתכנס ימי: $\int_1^{\infty} \sin(x) f(x) dx = \int_1^{\infty} \sin(x) \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} dx$

נצייר $g = \sin(f(x)) \cdot f'(x)$ (נשתמש בדרייטה עבור g - $\frac{1}{f'} + 1$)

$f'(x) = 1 + \log x$ מונוטונית $\frac{1}{f'} \rightarrow 0$ מונוטונית ו- $\frac{1}{f'} \rightarrow 0$

$\forall x \quad G(x) = \int_1^x g = -\cos(f(x)) \Big|_1^x \leq 2$ $\leftarrow$ נצייר g $\int_1^{\infty} g \frac{1}{f'} = \int_1^{\infty} \sin(x) dx$ מתכנס!

משפט פאטי

המונח תכנון חדון:

במסגרת אינטגרלית:

משפט: $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית יורדת אינטגרלית $\rightarrow [1, b]$ $b > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ מתכנס} \iff \int_1^{\infty} f \text{ מתכנס}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\left[\begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f = L \\ \Downarrow \\ \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f = L \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{ת.פ.} \\ \text{הפוך מונוטוני} \end{array}$$

$$\int_1^n f = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f = \sum_{k=2}^n I_k \quad \forall x \in [k-1, k] : f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

$$\Downarrow$$

$$f(k) \leq I_k \leq f(k+1)$$

משפט פאטי

$$0 \leq f \leq 1 < 1/2x \leq e^{-1} < 1 < x \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \text{ מתכנס?} \quad \text{הראו: הפוך}$$

נכון מכפיק לחקור את ההתכנסות של $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ של פאטי
הדיון מתבדר Δ אפשר היה לבדוק ישירות ע"י החסם $y = \ln x$

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \text{ האם מתכנס?}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \text{ להתכנסות של } (f(x) = \frac{1}{x \ln x}) \text{ בדישקור}$$

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{e^y} e^y dy = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y} \quad \text{נחז' : } \ln x = y \quad x' = e^y \iff x = e^y$$

סדרות פונקציות:

הצגה: $\{f_n\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ נקראים מתכנסת נקודתית

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) := f(x) \quad x \in X_0 \text{ מתקיים : } X_0 \subseteq X$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad X = \mathbb{R} \oplus$$

$$f(x) = 0, \quad X_0 = \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n} - \left(\frac{1}{x}\right)^n, \quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \oplus$$

$x \in X_0$ מתכנסם לאפס כאשר $|x| < 1$ בומר $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ נהג - $\{x \in [-1, 1]\}$?

$$f_n(x) = \int_0^1 x \quad x=1 \quad \text{אם } x=1 \quad \text{אם } x=-1 \quad \text{אם } x \in (-1, 1) \quad \text{אם } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$(f_n)_n: X \rightarrow \mathbb{R}$$

התכנסות במ"ש

$$(f_n)_n \xrightarrow{u} f \quad \text{אם } \forall \epsilon > 0 \exists N \text{ כ"פ } n \geq N \implies \|f_n - f\| < \epsilon$$

$$d_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad : x \in X, n \leq N$$

(במ"ש) $\iff$ (נקודתי)

$$X = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad f_n(x) = x^n$$

$$f(x) = 0 \quad \text{אם } x \in X \text{ אז } |f_n(x)| = |x|^n \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \text{ וכן } \|f_n - f\| = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

האם ההתכנסות היא במ"ש?

$$d_n = \sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x^n - 0| = \sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x|^n = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow{u} 0 \iff d_n \rightarrow 0$$

Δ הנחיה: ההוכחה עובדת רק אם $|q| < 1$ ואז $\frac{1}{2} < 1$

שגיאת התכנסות במ"ש

אם מתכנסת במ"ש f ואם קיימת ת"ס x_{n_k} כך ש-

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$\otimes$ האם $f_n(x) = x^n$ מתכנסת במ"ש ב- $[0, 1]$?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{כן מתכנס נקודתי: לפי}$$

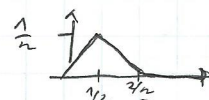
$$d_n = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1$$

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{אם } d_n \rightarrow 0 \text{ או } d_n \not\rightarrow 0$$

אם $x_{n_k} \rightarrow 1$ אז $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \rightarrow 0$

$$x_n = (1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \frac{1}{e} \quad x_n^n \not\rightarrow 0$$

שאלה נוספת: האם יש התכנסות במ"ש בתחום $[0, 1]$?



צורת הנחיה

② $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ מוגדרת ע"פ: $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

$$d_n = \sup |f_n(x) - 0| = \sup |f_n(x)| = \frac{1}{2} \quad f_n \xrightarrow{u} 0 \iff d_n \rightarrow 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad : [0, 1] \quad f_n(x) = x^n = x^{n+1} \quad f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad ①$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{אם } x_n \rightarrow 1 \text{ אז } f_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$f'_n(x) = n x^{n-1} - (n+1) x^n = (n+1) x^{n-1} (\frac{n}{n+1} - x)$$

$$d_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)|$$

הכנסך 2 תרגומי 5 חלק:

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx-1)^2}, \quad f_n: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \quad \textcircled{2}$$

$$d_n = \sup_{x \in (0,1)} \{f_n(x)\}$$

$f_n \rightarrow 0$ נקודות

$$f'_n(x) = \frac{2x(x^2 + (nx-1)^2) - (2x + 2n(nx-1)) \cdot x^2}{(x^2 + (nx-1)^2)^2} = \frac{2x(nx-1)^2 - (2x + 2n^2x - 2nx)x^2}{(x^2 + (nx-1)^2)^2} = 0$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{1}{n} \quad \text{או} \quad x = -\frac{1}{n} \quad \text{כי} \quad -1 - nx = 0$$

בסך הכל, נקודות קיצון!

$$d_n = \max \{f_n(\frac{1}{n}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)\} = f_n(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 0$$