חדו"א תרגול 4

טענה: $f\in R([-a,a])$ ואי-זוגית $\Leftarrow$ $\int_{-a}^{a} f = 0$

דרך I: משתמשים ב-⊛

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \underset{x=\varphi(t)=-t}{=} \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt \overset{\text{פונ' אי-זוגית}}{=} -\int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

⊛ אם φ גזירות (ב-C^1) ו-f אינט' אזי:

(1) $f\circ\varphi$ אינט'

(2) נוסחת ההצבה משתנים לאינטגרל מסוים נכונה.

דרך II: בפרט: $f\in R([-a,a])$. ניקח חלוקה $\Pi_n=\{0,\frac{a}{n},\dots,\frac{n-1}{n}a,a\}$, $\vec{T}_n=\{\frac{1}{n}a,\dots,a\}$

ומהנתון $S(f,\Pi_n,t_n)\xrightarrow{n\to\infty}\int_{0}^{a} f$.

ועבור $\Pi_n^*=\{0,\pm\frac{a}{n},\dots,\pm a\}$, $\vec{T}_n^*=\{\pm\frac{a}{n},\dots,\pm a\}$

$$0 \overset{\text{מצטמצם בהתאמה}}{=} S(f,\Pi_n^*,t_n^*)\to\int_{-a}^{a} f$$ ▨

שימושים לאינטגרל מסוים:

① $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}\right)=?$ ⚠ הטריק - להסתכל על הסכום כסכום רימן משהו.

מתקיים: $\sum\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})$.

עבור $f(x)=x$, $\Pi_n=\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$, $T_n=\{\frac{1}{n},\dots,1\}$, $\lambda(\Pi_n)=\lambda_n=\frac{1}{n}=\Delta x_i$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\cdot f(\frac{i}{n})$$

מאינטגרביליות של $f(x)$: $\sum\frac{i}{n^2}\longrightarrow\int_{0}^{1} x=\frac{1}{2}$ ▨

② $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+in}\right)=?$

$f(x)=\frac{x}{1+x}$

$$\sum\frac{i}{n^2+in}=\sum\left(\frac{i/n}{1+i/n}\right)\cdot\frac{n}{n^2}=\sum\frac{1}{n}\cdot f(i/n)$$

(f אינט', נק' רצויה וחלוקה $\to 0$) $\downarrow n\to\infty$

$$\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x}=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=x-\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}=1-\ln 2$$ ▨

③ חשבו נגזרת של: $F(x)=\int_0^{2x} t\cdot e^t$

נגדיר $f(x):=\int_0^x t\cdot e^t \Leftarrow F(x)=f(2x)$

מניוטון לייבניץ $f'(x)=x\cdot e^x$ (כי xe^x רציפה בכל הקטע)

$$\Rightarrow F'(x)=f'(2x)\cdot 2=4xe^{2x}$$ ■

⚠ אם במקום $2x$ היה מופיע $b(x)$ היינו מקבלים $F'(x)=f'(b(x))\cdot b'(x)$

④ $f\in C(\mathbb{R})$. נגדיר לכל $\delta>0$: $F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f$

(1) הוכיחו ש- $F_\delta\in C^1$

(2) הוכיחו שלכל $a<b$, $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\sup_{x\in[a,b]}\{|F_\delta(x)-f(x)|\}<\varepsilon$

<u>פתרון:</u> כי $F'=f\in C(\mathbb{R})$

(1) נגדיר $F(x)=\int_0^x f\in C^1(\mathbb{R})$. מתקיים: $F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}(F(x+\delta)-F(x-\delta))\in C^1(\mathbb{R})$. (כי $F\in C^1$)

(2) $f\in C([a,b])$ ולכן מקנטור f רבמ"ש ב- $[a-1,b+1]$.

היינו רוצים לבחור δ לנו הקיים עבורו, לכן נבחר $\min\{\delta,1\}$

לכן קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-t|<\delta$ אז $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$.

$$|F_\delta(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)dt-\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(x)\cdot dt\right|=$$

$$=\frac{1}{2\delta}\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta}(f(t)-f(x))dt\right|\underset{\triangle}{\le}\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}|f(x)-f(t)|dt\le\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varepsilon dt=\frac{1}{2\delta}\cdot 2\delta\varepsilon=\varepsilon$$

⚠ מבטא רעיון שאפשר לקרב $f\in C(\mathbb{R})$ במ"ש, עם פונקציות C^1.

אינטגרל לא אמיתי

<u>הגדרה:</u> נניח ש- $a<b$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. נניח שלכל $t<b$, $f\in R([a,t])$ (b נק' בעייתית)

אם קיים הגבול (במובן הרחב!) - $\lim_{t\to b^-}\left(\int_a^t f\right)=L<\infty$ אז אומרים של- f קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f=L$.

⚠ <u>הערות:</u>

(1) בדומה ל- a^+ כש- $a\in\{-\infty\}\cup\mathbb{R}$

(2) אם $c\in(a,b)$ בעייתית (נק' יחידה מה הסוג או חסומה) מגדירים אותו ע"י $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$ ואומרים שהאינט' קיים $\Leftrightarrow$ $\int_c^b f$, $\int_a^c f$ ק"מ.

לא קשור - סוף השיעור

<u>טענה:</u> $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עולה, אז לכל n:

$$\int_0^1 f\overset{①}{\le}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\overset{②}{\le}\int_0^1 f+\frac{1}{n}\qquad (f(0)=0,\ f(1)=1)$$

① $I\le \Sigma(f,\Pi_n)$ ✓

② $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)+\frac{1}{n}\le I+\frac{1}{n}$, $=\sigma(f,\Pi_n)$ ■

המשך תרגול 4 חדו"א

קריטריון קושי: נניח שלכל $t\in(a,b)$ $f\in R([a,t])$, אז האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f$ קיים, $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $a<B<b$ כך שלכל $B<b_1<b_2$: $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right|<\varepsilon$.

דוגמאות:

① $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \overset{\text{אם קיים}}{=} \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx \overset{NL}{=} \lim_{t\to\infty}\left(\arctan(x)\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\arctan t = \pi/2$ ✓

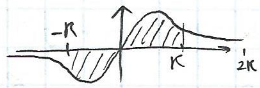
② $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \pi/2$ (הפונ' זוגית/כמו קודם)

⚠ **הערה:** סימנו ש-f אי זוגית, $\int_{-a}^a f=0$. תבדקו ש-f זוגית, $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

④ $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2} \overset{\text{RV טעות!}}{=} \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\ln(1+x^2)\Big|_{-R}^R\right) = \lim_{R\to\infty}(0)=0$

⚠ **אבל** ההגדרה של P.V לא מתלכדת עם ההגדרה של אינ"א! ממדיקה

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}$$



⚠ בדקו את הגבול $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{2R} \frac{2x}{1+x^2}\right) = ?$

⑤ $\int_0^\infty \sin x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin x = \lim_{R\to\infty}\left(\cos x\Big|_R^0\right) = \lim_{R\to\infty}(1-\cos R) \to$ **אין גבול!** האינטגרל $\int_0^\infty \sin x$ לא קיים!

← לפי קושי נראה שלא מתקיים התנאי ל-$\varepsilon=\frac{1}{10}$. נניח בשלילה שקיים האינטגרל, אז יש $B\in\mathbb{R}$ כך שלכל $B<b_1<b_2$: $\left|\int_{b_1}^{b_2}\sin x\right|<\varepsilon$

נבחר $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $B<2\pi k=b_1$ ו- $b_2=b_1+\pi$:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}\sin x\right| = -\cos x\Big|_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} = 2 \not< 1/10$$

⑥ $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac12\ln^2 x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{(\ln\varepsilon)^2}{-2} \longrightarrow -\infty$

בה"כ אי שליליות

מבחני התכנסות לפונ' שומרות סימן:

① **משפט:** תהי $0\le f$. אז $F(x)=\int_a^x f$ היא מונוטונית. מתקיים:

$\int_a^b f$ קיים $\Leftrightarrow$ F חסומה ע"י b.

② **מבחן השוואה:** נניח $0\le g\le f$.

$\int f$ קיים $\Leftarrow$ $\int g$ קיים

$\int g$ מתבדר $\Leftarrow$ $\int f$ מתבדר

③ **מבחן השוואה גבולי**: נניח $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to b} L$ אזי:

(1) $L\in(0,\infty)$: $\int_a^b f<\infty \iff \int_a^b g<\infty$

(2) $L=0$: $\int_a^b g<\infty \Rightarrow \int_a^b f<\infty$

(3) $L=\infty$: $\int_a^b f<\infty \Rightarrow \int_a^b g<\infty$

פונקציות "עוגן" להשוואה:

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}<\infty \iff 1<\alpha \\ \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}<\infty \iff \alpha<1 \end{array}}$$

⊛ הפוך מסימני ⊛

(בדומה עבור $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \iff \alpha<1$, $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha} \iff \alpha<1$)

תרגילים:

① $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4-x^2+1}=f(x) \to$

האם x^4-x^2+1 מתאפס?

⇕

האם y^2-y+1 מתאפס ל $0\le y$? $\Delta=b^2-4ac=-3<0$ לא!

לכן $x^4-x^2+1\ge c>0$.

⇐ נק' בעייתית יחידה $+\infty$. נשווה את $f(x)$ עם $g(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x^2}{x^4-x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^4}{x^4-x^2+1}\xrightarrow{x\to\infty}1 \Rightarrow \int^\infty f<\infty \iff \int^\infty g<\infty$$

וזה נכון! (כי $\alpha=2>1$)

② $\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ — האינטגרל מתכנס אם מתכנסים שני הבאים:

$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=I$, $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=J$

נראה ש-I מתבדר: נשווה עם $g(x)=\frac{1}{x}$ כאשר $\int_0^1 g=\infty$:

$\frac{f}{g}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\xrightarrow{x\to0}1 \Longrightarrow$ f,g מתכנסים/מתבדרים יחד ולכן I לא קיים!

③ $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}$

מבינים שמתכנס $\iff$ $\int_0^\infty e^{-x^2}$ מתכנס (הפונקציה זוגית!)

נשווה עם $g(x)=\frac{1}{x^{18}}$, וכידוע $\int_1^\infty g<\infty$:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{18}}{e^{x^2}}\xrightarrow{x\to\infty}0$$

④ $\int_{1/2}^\infty \sin(\frac{1}{x^2}) = \int_{1/2}^{1/\sqrt{\pi}}\sin(\frac{1}{x^2})+\int_{1/\sqrt{\pi}}^\infty \sin(\frac{1}{x^2})$

עבור $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ כדי שהפונקציה תהיה חיובית.

בתחום $[\frac{1}{\sqrt{\pi}},\infty]$: $g(x)=\frac{1}{x^2}\ge \sin\frac{1}{x^2}\ge 0$ וממבחן ההשוואה האינטגרל קיים.

⑤ $\int_0^1 \frac{1}{\underbrace{(\cos x-1)}_{1-\cos x}\sqrt{1-x}}$ — $f(x)$

מתכנס $\iff$ קיימים: $I=\int_0^{1/2} f(x)$, $J=\int_{1/2}^1 f(x)$

נראה ש-I מתבדר: כדי נבחר את $g(x)$ ולראות ש-I מתבדר נשים ♡: (מטיילור)

$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{1-x}}\xrightarrow{x\to0}2$

מתכנסים/מתבדרים יחד וסיימנו!

ידוע ש $\int_0^{1/2}\frac{1}{x^2}=\infty$ לכן נקבל.