חדו"א תרגול 3

תרגיל: פונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא אינט' ב- $[0,1]$.

פתרון: $\forall\Pi\quad\forall i\quad M_i=1,\ m_i=0$

$$\Downarrow$$

$$\omega(D,\Pi)=\sum(M_i-m_i)\Delta x_i=1$$

$$\Downarrow\ (\forall\Pi)$$

$$\omega(D,\Pi)\equiv 1 \underset{\lambda(\Pi)\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

⚠ **הערה:** f אינטגרבילית $\Leftarrow$ $|f|$ אינטגרבילית.

ההפך לא נכון. למשל $|D(x)-\frac12|$ אינטגרבילית, אבל $D(x)-\frac12\notin R[0,1]$

תרגיל: הוכיחו שפונקציית רימן $R(x):=\begin{cases}1/q & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\ \text{(שבר מצומצם)}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ אינט' ב- $[0,1]$ וחשבו את $\int_0^1 R$

נשתמש בטענת עזר: אם $f,g\in R([a,b])$ ומתקיים $f|_D=g|_D$ על קב' צפופה D
אז $\int_a^b f=\int_a^b g$.

הוכחה ש- $R(x)$ אינטגרבילית: (יהי $\varepsilon>0$) נשים לב שיש מס' סופי, $N(\varepsilon)$, של נק' בקטע $[0,1]$, שמקיימות $R(x)\geq\frac{\varepsilon}{2}$ ($\frac{1}{q(x)}\geq\frac{\varepsilon}{2}$, $q(x)\leq\frac{2}{\varepsilon}$).

לכן לכל חלוקה Π יש לכל היותר $N(\varepsilon)$ קטעים בהם $\omega(f,I_i)\geq\frac{\varepsilon}{2}$, בכל שאר הקטעים $\omega(f,I_i)<\frac{\varepsilon}{2}$. נסדר קבוצות:

$$B=\{i\in\{1,..n\}\mid\omega(f,I_i)\geq\tfrac{\varepsilon}{2}\}\quad(|B|\leq N(\varepsilon))$$

$$G=\{i\in\{1,..n\}\mid\omega(f,I_i)<\tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

נחשב $\omega(f,\Pi)$ עבור $\lambda(\Pi)<\delta$:

$$\omega(R,\Pi)=\sum_{i\in B}M_i\Delta x_i+\sum_{i\in G}M_i\Delta x_i\leq$$

$$\leq\sum_{i\in B}1\cdot\delta+\sum_{i\in G}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\Delta x_i\leq\delta\cdot N(\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1$$

לכן סיימנו אם לכל ε ניתן נבחור $\delta>0$ כך ש- $\delta\leq\frac{\varepsilon}{2N(\varepsilon)}$ (אפשר כי $N(\varepsilon)$ לא תלוי בחלוקה!)

(והאינטגרל $\int_0^1 R=\int_0^1 0=0$ כי הן מזדהות על האי-רציונליים). ▨

הגדרה מורחבת: נגדיר לכל f,Π,ε: $B(f,\Pi,\frac{\varepsilon}{2})=\{i\in\{1,..n\}\mid\omega(f,I_i)\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$

תכונות של אינטגרל רימן:

אם $f,g\in R([a,b])$ אז:

1. לינאריות: לכל $c\in\mathbb{R}$: $\int_a^b (cf+g)=c\int_a^b f+\int_a^b g$
2. f אינטגרבילית בכל תת קטע ולכן $c\in(a,b)$ מתקיים: $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$
3. $\underline{0\le f} \Leftarrow 0\le\int_a^b f$
4. מונוטוניות: $\underline{f\le g} \Leftarrow \int_a^b f\le\int_a^b g$
5. הגדרה: $\int_b^a f:=-\int_a^b f$
6. $|f|$ גם אינטגרבילית, ומתקיים: $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b |f|$ (אי"ש $\triangle$)
7. $\underline{f^2}$ גם אינטגרבילית
8. $\underline{fg}$ גם אינטגרבילית ← הוכחה I: $f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$

הוכחה II: f,g אינט' לכן חסומות. נניח $|f|,|g|\le M$

$\forall x,y\in[a,b]$:

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=$$
$$=|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\le|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)|\le$$
$$\le M(|g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)|)$$

לכן לכל תת קטע $J\subseteq[a,b]$:

$$\omega(fg,J)=\sup_J\{fg\}-\inf_J\{fg\}=$$
$$=\sup_{x,y\in J}|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\le M\Big(\sup_{x,y\in J}|f(x)-f(y)|+\sup_{x,y\in J}|g(x)-g(y)|\Big)=M\cdot(\omega(f,J)+g(f,J))$$

לכל חלוקה Π:
$$\omega(fg,\Pi)=\sum\omega(fg,I_i)\cdot\Delta x_i\le M\Big(\sum\omega(f,I_i)+\sum\omega(g,I_i)\Big)\Delta x_i=$$
$$=M(\omega(f,\Pi)+\omega(g,\Pi))$$

הטענה נובעת מההנחה.

תרגיל: הוכח/הפרך:

(1) f,g אינטגרביליות $\Leftarrow$ $f\circ g$ אינט' X

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, g אינטגר' $\Leftarrow$ $f\circ g$ אינט' ✓

(3) f אינטגרבילית, g רציפה $\Leftarrow$ $f\circ g$ אינט' X

(4) f אינט', g רציפה $\Leftarrow$ $f\circ g$ אינט' ✓

פתרונות:

(1) לא נכון, כי אם נבחר $f=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$ אינט' $g=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ אינט' ונקבל $f\circ g=D(x)$. לא אינט'!

(2) נכון! הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. g אינט' $\Leftarrow g$ חסומה, נניח $|g|\le M$. f רציפה ונסמן $L>0$

בקטע $[-M,M]$ ולכן רציפה במ"ש, כלומר קיים $\delta>0$ קטן מספיק כך ש- $|x-y|<\delta$! לכל $x,y\in[-M,M]$ אזי $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

g אינט', לכן יש חלוקה Π כך ש- $\omega(g,\Pi)<\frac{\delta\cdot\varepsilon}{4\cdot L}$ $=: \sum\omega(g,I_i)\Delta x_i$

המשך הרצאה 3:

המשך הוכחה 2: $\sum_{i\in B(g,\Pi,\delta)} \omega(g,I_i)\Delta x_i + \sum_{i\in G(g,\Pi,\delta)}\omega(g,I_i)\Delta x_i = \sum \omega(g,I_i)\Delta x_i = \omega(g,\Pi) < \frac{\delta\cdot\varepsilon}{4L}$

לכן $\frac{\delta\cdot\varepsilon}{4L} > \sum_{i\in B(g,\Pi,\delta)} \omega(g,I_i)\Delta x_i \ge \delta\sum_{i\in B}\Delta x_i$

מכאן ש- $\sum_{i\in B(g,\Pi,\delta)}\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{4L}$

נרשום (נחסום) את התנודה של $f\circ g$:

$$\omega(f\circ g,\Pi) = \sum_{i\in B(g,\Pi,\delta)} \omega(f\circ g, I_i)\Delta x_i + \sum_{i\in G(g,\Pi,\delta)}\omega(f\circ g,I_i)\Delta x_i \underset{(*)}{\le} \sum_{i\in B} 2L\cdot\Delta x_i + \sum_{i\in G}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\Delta x_i \le$$

$$\le 2L\cdot\frac{\varepsilon}{4L} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(*) השתמשנו בעובדה שלכל $i\in G$ מתקיים $\omega(f\circ g,I_i)\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ כי לכל $x,y\in I_i$, $|g(x)-g(y)|\le\delta$ ולכן מרציפות של f $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > |f\circ g(x)-f\circ g(y)|$.

משפט ערך ממוצע אינטגרלי:

<u>ניסוח 1</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אז יש $c\in[a,b]$ כך ש- $\boxed{\int_a^b f = f(c)(b-a)}$

$$f(c)=\frac{\int_a^b f}{b-a}$$

<u>ניסוח 2</u>: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינט', ו- $g\ge 0$. אזי קיים A כך ש- $\boxed{\int_a^b f\cdot g = A\cdot\int_a^b g}$ $\left(\int_a^b f(x)\cdot\left(\frac{g(x)}{\int g}\right)dx = A\right)$

וגם $m=\inf_{[a,b]}\{f\}\le A\le\sup_{[a,b]}\{f\}=M$

<u>הוכחה-ניסוח 1</u>: מתקיים: $\forall x\in[a,b].\ m\le f(x)\le M$

$$m(b-a)=\int m\le\int f\le\int M=M\cdot(b-a)$$

נסמן ש- $\underset{\text{מקסימום}}{f(d)=M}\ge\frac{\int_a^b f}{b-a}\ge \underset{\text{מינימום}}{m=f(e)}$ ⇐ ממשפט ערך הביניים לפונק' רציפות יש $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=\frac{\int_a^b f}{b-a}$ ∎

<u>הוכחה ניסוח 2</u>: אותו טריק..

<u>תרגיל</u>: הוכיחו ש- $\frac{1}{\pi}\ge\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\ge\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\pi}$

מתקיים כי $g(x)=\sin x\ge 0$. ת"ע המשפט מתקיים, לכן יש $2\pi\le c\le 3\pi$

כך ש- $I=\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}=f(c)\cdot\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x=\frac{1}{c}\cdot 2$

$I=\frac{2}{c}$ ∧ $2\pi\le c\le3\pi$ ⇐ מש"ל ∎

ניוטון לייבניץ:

<u>משפט</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב-x_0. נגדיר $F:[a,b]\to\mathbb{R}$: $F(x)=\int_a^x f$

① F גזירה ב-x_0 ; $F'(x_0)=f(x_0)$

② אם ל-f יש קדומה אז $\int_a^b f=F(b)-F(a)$

<u>דוגמאות</u>:

1.  אינטגרבילית בלי קדומה (לא מקיימת ע"ב)

2. $\underline{R(x)}$

3. הפונקציה $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & : x\neq 0\\ 0 & : x=0\end{cases}$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ו- $f=F'$ לא חסומה.

כאן ל-f יש קדומה אבל היא לא אינטגרבילית

<u>תרגיל</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה. $f(a)=f(b)=0$. הוכיח שיש נקודה $c\in(a,b)$

כך ש-: $|f'(c)|\geq\frac{2}{(b-a)^2}\cdot\left|\int_a^b f\right|$

$(\max_{[a,b]} f')$

<u>הוכחה</u>: ממשפט ע"ב אינטגרלי יש c_1 בקטע כך ש- $f(c_1)=\frac{\int f}{b-a}$

נניח בה"כ ש- $c_1<\frac{a+b}{2}$ כלומר $|c_1-a|\leq\frac{b-a}{2}$. (לפי לגרנז' ב- $[a,c_1]$)

$$|f'(c)|=\left|\frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a}\right|=\left|\frac{f(c_1)}{c_1-a}\right|=\frac{1}{c_1-a}\cdot\frac{\int_a^b f}{b-a}\geq\frac{2}{b-a}\cdot\frac{\int_a^b f}{b-a} \quad ■$$

② <u>שאלה - מה יותר גדול?</u> $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x$ או $\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x$?

$0\leq\sin x\leq 1$ לכן גם $0\leq\sin^{10}x\leq\sin^2 x\leq 1$

לכן $\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x\leq\int_0^{\pi/2}\sin^2 x$. יש להסביר למה אין שוויון.

מבחינת הטענה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ א. שלילית ורציפה וקיימת נק' $x_0\in[a,b]$ כך

ש- $0<f(x_0)$ אז $0<\int_a^b f$

כאן $0<f=\sin^2x-\sin^{10}x$ למשל עבור $x=\pi/4$ ורציפה ולכן אי שוויון ממש.

חשבון 2 חדו"ח תרגול 3

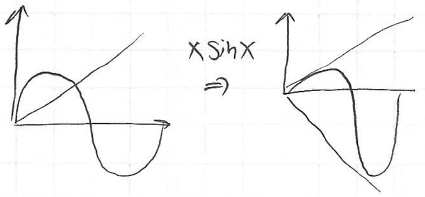
שיטות אינטגרציה

<u>תרגיל:</u> $\int_1^e \ln x \cdot dx = ?$ $= [x\cdot\ln x - x]_1^e = 1 = (e-e)-(0-1)$

אינטגרציה בחלקים:

משפט: $u,v \in C^1([a,b])$ אזי

$$\int_a^b uv' = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u'v$$



<u>דוגמה:</u> $\int_0^{2\pi} x\sin x\, dx$

$$\int_0^{2\pi} \underset{u}{x}\, \underset{v'}{\sin x} = x(-\cos x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 8\, 1\cdot(-\cos x) =$$

$$= -2\pi - 0 = -2\pi$$

החלפת משתנים:

משפט: אם f רציפה ו- $\varphi[\alpha,\beta]\to[a,b]$ היא C^1 ו- $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$

אזי:

$$\int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

$x=\varphi(t)$