חדוא 2 תרגול 2

אינטגרלים של פונ' רציונליות ושימושיהם:

הגדרה: פונקציה רציונלית היא פונקציה מהצורה $f=\frac{P}{Q}$ כאשר P,Q - פולינומים.

היום: • לכל פונק' רציונלית אפשר למצוא קדומה

• שימוש בפו' רציונליות כדי לחשב אינטגרלים מסוגים מסוימים בעזרת הצבות.

הגדרות:

(1) פונקציה רציונלית $f=\frac{P}{Q}$ נקראת פשוטה אם $\deg P<\deg Q$

(2) פונ' רציונלית נקראת יסודית אם היא בעלת אחת מהצורות הבאות:

• $\frac{A}{(x-a)^n}$, $A,a\in\mathbb{R}$, $1\le n\in\mathbb{N}$

• $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $A,B,p,q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $p^2-4q<0$ ($\Leftarrow$ המכנה >0)

אינטגרלים של פ' רציונליות:

לכל פונק' רציונלית יש קדומה בכל קטע בו היא מוגדרת.

הסבר: אלמנטרית $\Rightarrow$ רציפה.

חישוב הקדומה של פונ' אלמנטרית:

מטרה: לחשב $\int R(x)$, R - פונ' רציונלית.

נעשה זאת ב-3 שלבים:

① **חילוק ארוך של פולינומים:** כל פ' רציונלית ניתן לרשום כסכום של פולינום ופ' רציונלית פשוטה.

② **שברים פשוטים:** כל פ' רציונלית פשוטה ניתן לרשום כסכום של פ' רציו' אלמנטריות.

③ למצוא נוסחה לקדומה של פ' רציונלית יסודית.

שלב 3: פתרון אינטגרלים של פ' רציונליות יסודיות:

טענה: מתקיימים:

(1) $\int\frac{A}{x-a}=A\log|x-a|+C$

(2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$, $n>1$

(3) עבור $p^2-4q<0$:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\log(x^2+px+q)+\frac{B-\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-(p/2)^2}}\cdot\arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-(p/2)^2}}\right)+C$$

(4) עבור $p^2-4q<0$, $n>1$, אז $J_n=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ (כמו)

$$J_n=\frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{A}{2}p\right)I_n$$

כאשר $I_n=\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$, ובנוסף I_n מקיים:

$$I_{n+1}=\frac{x+p/2}{2n[q-(\frac{p}{2})^2](x^2+px+q)^n}+\frac{2n-1}{2n[q-(p/2)^2]}I_n$$

ו-I_1 נתון ע"י סעיף מס' 3.

<u>הוכחה:</u> (1) ראינו בשבוע שעבר.

(2) מתרגיל הבית.

(3) <u>רעיון:</u> נקבל במונה נגזרת של המכנה, ואז: $\int\frac{f'}{f}=\log|f|+C$

כלומר נרצה למצוא מקדמים C,D: $Ax+B=C(x^2+px+q)'+D=C(2x+p)+D=$

$$=2Cx+Cp+D$$

לכן נשווה מקדמים: $A=2C$, $B=Cp+D \Leftarrow C=A/2,\ D=B-\frac{A}{2}p$

$$\Rightarrow\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}+[B-\frac{A}{2}p]\int\frac{1}{x^2+px+q}$$

כעת נפתור בנפרד: $\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}=\log(x^2+px+q)+C$.

נותר: $\int\frac{1}{x^2+px+q}$ נעשה "השלמה לריבוע": $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+\underbrace{q-(\frac{p}{2})^2}_{>0}$

כעת לפי הנתון נוכל לסמן: $q-(\frac{p}{2})^2=a^2$ ואז:

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}=\int\frac{1}{(x+p/2)^2+a^2}dx=\begin{bmatrix}t=x+\frac{p}{2}\\dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2}dt=\begin{bmatrix}s=t/a\\ds=\frac{dt}{a}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{s^2+1}ds=\frac{1}{a}\arctan(s)+C=\frac{1}{a}\arctan(\frac{t}{a})+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-(p/2)^2}}\cdot\arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-(p/2)^2}}\right)+C$$

(4) $J_n=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ בתור התחלה, נחקה את הסעיף הקודם.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+(B-\frac{A}{2}p)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$$

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx=\begin{bmatrix}t=x^2+px+q\\dt=(2x+p)dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^n}=\frac{1}{-(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+C$$

פתרנו לפי סעיף 2 ומציבים בחזרה את x

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}\underset{4}{=}\begin{bmatrix}t=x+p/2\\dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}(t)'dt=$$

"השלמה לריבוע" a- כמו הקודם

אינטגרציה בחלקים

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\left[\int\frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt-\int\frac{a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt\right]=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\cdot I_n-2na^2I_{n+1}\Rightarrow I_{n+1}=\frac{t}{2na^2(t^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

ומהצבה x בחזרה מתקבל כנ"ל הנוסחה הנדרשת.

$\blacksquare$

המשך חדו״א II תרגול 2

שלב 2: כל פ׳ רציונלית פשוטה היא סכום של יסודיות (השברים הפשוטים)

הגדרה: פולינום ריבועי נקרא אי פריק אם אין לו שורשים.

משפט: המשפט היסודי של האלגברה:

כל פולינום ממשי ניתן להציג כמכפלה של פולינומים לינאריים ופולינומים ריבועיים אי פריקים, מחלקות.

משפט: כל פונקציה רציונלית פשוטה ניתן להציג כסכום של יסודיות.

על עזרת ניתן אלגוריתם למציאת פירוק כזה.

עבור: $R=\frac{P}{Q}$ רציונלית פשוטה. נפרק את המכנה לפי המשפט היסודי:

$$Q=Q_1\cdot\ldots\cdot Q_m$$

עבור כל גורם מהצורה $Q_i=(x-a)^n$ הסכום יכיל את: $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$

עבור כל גורם מהצורה $Q_j=(x^2+px+q)^n$ הסכום יכיל: $\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$

כעת נרשום את הסכום הנ״ל, נעשה מכנה משותף ונשווה ל-R.

ע״י השוואת המקדמים במונה נמצא את כל ~~...~~ הנעלמים.

דוגמאות: ⊛ $R(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\ldots=\frac{(A+B)x+B-A}{(x+1)(x-1)}$

כעת נשווה מקדמים במונה: [המונים שווים לכל $x\neq\pm1$ ⇐ מרציפות הם שווים $\forall x$]

$$\begin{cases}A+B=0\\B-A=1\end{cases}\Rightarrow A=-\tfrac12,\ B=\tfrac12\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac12\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

⊛ $R(x)=\frac{x+3}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}$

מכנה משותף והשוואת מונים:

$$x+3=A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2$$

טריק: להציב $x=-1,x=1$. ← מקבלים 2 משוואות ומפחיתים את מס׳ הנעלמים.

⊛ $R(x)=\frac{5x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$

← מכנה משותף ← מוצאים את A,B,C,D,E

⊛ $R(x)=\frac{1}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x+2)^2}=\ldots$

שלב 1: חילוק ארוך:

משפט: כל פ' רציונלית ניתן לרשום כסכום של פולינום ופונקציה רציונלית פשוטה.

על הוכחה, אבל ניתן אלגוריתם למציאת הפירוק.

דוגמאות:

(*) $\frac{x^3-2x-1}{x^2+3}$

$$\begin{array}{l} \quad x \\ x^3-2x-1 \mid x^2+3 \\ -\underline{x^3+3x} \\ \quad -5x-1 \end{array}$$

עוצרים כשדרגת השארית קטנה מדרגת הפולינום המחלק, וקיבלנו:

$$\frac{x^3-2x-1}{x^2+3}=x+\frac{-5x-1}{x^2+3}$$

(*) $\frac{x^3+1}{x+1}$

$$\begin{array}{l} \quad x^2-x+1 \\ x^3+1 \mid x+1 \\ -\underline{x^3+x^2} \\ \quad -x^2+1 \\ \quad \underline{-x^2-x} \\ \qquad x+1 \\ \qquad \underline{x+1} \\ \qquad - \end{array} \Rightarrow \underline{x^2-x+1}$$

(*) $\int \frac{x^4}{x^3+x^2-x-1}$

$$=\int x-1+\frac{2x^2-1}{x^3+x^2-x-1}$$

$$\begin{array}{l} \quad x-1 \\ x^4 \mid x^3+x^2-x-1 \\ -\underline{x^4+x^3-x^2-x} \\ -\;-x^3+x^2+x \\ \quad \underline{-x^3-x^2+x+1} \\ \qquad 2x^2-1 \end{array}$$

$\int x-1$ קל. נותר האינטגרל הימני $\int \frac{2x^2-1}{x^3+x^2-x-1}$

שלב 2: שברים פשוטים. צריך לפרק את המכנה: $Q(x)=x^3+x^2-x-1$

נבחין כי $Q(1)=0$ ולכן $Q(x)$ מתחלק ב-$(x-1)$ [בלי שארית]:

ע"י חלוק ארוך מקבלים: $Q(x)=(x-1)(x^2+2x+1)=(x-1)(x+1)^2$

ונרשום ונחשב פירוק לשברים פשוטים: $\frac{2x^2-1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

בתוצאה סופית: $\int\frac{x^4}{x^3+x^2-x-1}=\int(x-1)+A\int\frac{1}{x-1}+B\int\frac{1}{x+1}+C\int\frac{1}{(x+1)^2}$

שימושים לאינטגרלים אחרים:

סימון: עבור פ' כלשהן $f_1(x),\dots,f_k(x)$, $R(f_1,\dots,f_k)$ מסמן פ' רציונליות של $f_1,\dots,f_k$, כלומר פ' כלשהי המתקבלת מ-$f_1,\dots,f_k$ בעזרת 4 פעולות החשבון.

אבחנה: אם $R=\frac{P}{Q}$ פ' רציונליות, אז גם R' פונק' רציונלית: $R'=\frac{P'\cdot Q-PQ'}{Q^2}$

① $\int R(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ ← הצבה: $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ אז $x=\frac{b-t^m d}{t^m c-a}$

בפרט, זו הצבה הפיכה ו-x פ' רציונלית של t, לכן גם $\frac{dx}{dt}$ זו פ' רציונלית.

לכן נקבל אחרי ההצבה אינטגרל של פ' רציונלית..

המשך 2 - החואב תראויב:

דוגמא:

$$\int \frac{x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{2x+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\rightarrow x=\frac{1+t^3}{t^3-1} \\ dx=\frac{3t^2}{(t^3-1)^2}dt\end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\frac{1+t^3}{t^3-1}\cdot t}{2\cdot\frac{1+t^3}{t^3+1}+t}\cdot\frac{3t^2}{(t^3-1)^2}\,dt \quad \ldots\ldots$$

פתרון אינטגרל של רציונליות, מכאן מציבים חזרה את x.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2 \\ dx=2t\,dt\end{array}\right]=\int\frac{2t}{1+t}\,dt \ldots$$

(2) $\int R\left(x,\sqrt[m_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[m_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

הצבה: (נסמן $n=lcm(m_1,\ldots,m_k)$ המכ' המשותפ' הקטן ביותר המתחלק מכל $m_1,\ldots,m_k$. למשל $lcm(2,3,4)=12$ ומציבים: $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

מקבלים אינטגרל של פ' רציונליות.

דוגמא:

$$\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x}\rightarrow x=t^6 \\ dx=6t^5dt\end{array}\right]=\int\frac{6t^5}{t^6(1+2t^3+t^2)}\,dt$$

(3) הצבות אוילר: $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

(א) אם $a>0$:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\cdot x$$
$$\Downarrow$$
$$\cancel{ax^2}+bx+c=t^2-2t\sqrt{a}x+\cancel{ax^2}$$
$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$$

$\Leftarrow$ ההצבה נותנת אינטגרל של פ' רציונלית

(ב) אם $c>0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$$

תרגיל: מצאו במפורש את $t(x)$ ובדקו שההצבה הפיכה ונותנת אינטגרל של פ' רציונליות

(ג) אם יש שני שורשים שונים ל- ax^2+bx+c, ונסמנם x_1,x_2. אז:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\pm(x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

וזו בדיוק ההצבה מספר 1. $R\left(x,\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right)$

דוגמא (נשתמש ב-א', כי $a=1>0$):

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x+1}+x=t\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt\end{array}\right]=\int\frac{1}{t}\cdot 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt$$

④ הצבה טריגו' : $\int R(\sin x, \cos x)$

הצבה: $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Leftarrow x=2\arctan t$

$$\frac{dx}{dt}=(2\arctan t)'=\frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

לכן מקבלים אינטגרל של פ' רציונלית.

דוגמאות:

- $$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\begin{bmatrix} t=\tan\frac{x}{2} \\ dx=\frac{dx}{dt}\cdot dt=\frac{2}{1+t^2}dt\end{bmatrix}=\int\frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

- $$\int\sin^6 x\cos^7 x\,dx=\begin{bmatrix} t=\tan\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\end{bmatrix}=\int\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6\cdot\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^7\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

כאן אפשר לנסות גם:

$$\int\sin^6 x\cos^7 x\,dx=\int\sin^6 x\cdot(1-\sin^2 x)^3\cdot(\sin x)'\,dx=\begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=(\sin x)'dx\end{bmatrix}=$$

$$=\int u^6(1-u^2)^3du \leftarrow$$ יותר קל