חדו"א 2 תרגול 1

דניאל - danielr6@post.tau.ac.il

אינטגרל לא מסוים:

הבעיה: בהינתן $f: I\to\mathbb{R}$ נרצה למצוא פונ' $F: I\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש- $F'=f$.

הגדרה: פונ' F נקראת **קדומה** של f ב-I אם לכל $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

מתי אין קדומה?

* **משפט** (תכונת דרבו של הנגזרת): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה אז הפונ' f' מקבלת בקטע כל ערך בין $f'(a)$ ל- $f'(b)$.

⇐ **מסקנה:** אם ל-f אין תכונת ערך ביניים בקטע, אז אין לה קדומה.

* **משפט** (נגזרת אינה אי רציפות סליקה): אם f גזירה בסביבה ימנית מנוקבת של a, ורציפה ב-a מימין, ובנוסף קיים $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ אז f גזירה מימין ב-a ומתקיים $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+} f'(x)$

הגדרה: נתונה $f: I\to\mathbb{R}$. **האינטגרל הלא מסוים** של f ב-I הוא אוסף כל הפונ' הקדומות של f ב-I.

סימון:
$$\int f = \int f(x)dx = \{F: I\to\mathbb{R},\ F'=f\}$$

טענה: אם F_1, F_2 שתי קדומות של f בקטע I אז קיים $C\in\mathbb{R}$ כך ש- $F_1=F_2+C$.

הוכחה: לפי הנתון ב-I: $(F_1-F_2)'=f-f=0$

⇐ לפי משפט מחדו"א 1 קיים $C\in\mathbb{R}$ כך ש- $F_1-F_2=C$ ■

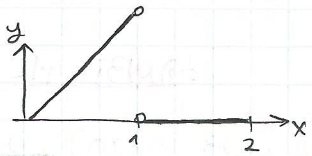
⚠ **הערה:** מצד שני, אם F קדומה של f, לכל $C\in\mathbb{R}$ גם $F+C$ קדומה של f
($(F+C)'=F'=f$)

⇐ לכן בקטע מספיק לבחור קדומה אחת ולרשום: $\int f(x)dx = F(x)+C$

<u>אינטגרלים מסוימים בסיסיים:</u>

- $\int x = \frac{x^2}{2} + C$
- $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad , \alpha \neq -1$
- $\int x^{-1} = \log|x| + C$
- $\int \log x = x\log x - x + C$
- $\int e^x = e^x + C$
- $\int \sin x = -\cos x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$

<u>תרגילים:</u> מצאו את אוסף הקדומות של:

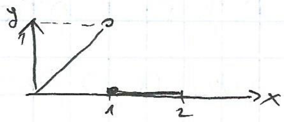


① הפונ' f המוגדרת על $I=(0,1)\cup(1,2)$:

<u>פתרון:</u> ב-$(0,1)$: $f(x)=x$ ואוסף הקדומות הוא $\frac{x^2}{2}+C_1$

ב-$(1,2)$: $f(x)=0$ ואוסף הקדומות הוא C_2

$\Leftarrow$ כך הם הקדומות של f ב-I הן: $F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+C_1 & ; x\in(0,1) \\ C_2 & ; x\in(1,2) \end{cases}$ ▪



② הפ' f המוגדרת על $I=(0,2)$ ע"י:

<u>פתרון:</u> ל-f אין קדומה ב-I כי ל-f אין תכונת ערך הביניים בקטע $(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$

קב' תמונות f היא $\{0\}\cup(\frac{1}{2},1)$ (ולא קטע!) ▪

<u>משפט</u> (נוכיח בהרצאה): אם f רציפה בקטע I אז יש לה קדומה ב-I.

<u>טענה:</u> אם ל-f,g יש קדומות ב-I, אז גם ל-$f+g$ ול-αf ($\alpha\in\mathbb{R}$) יש קדומות ב-I, ומתקיים:

$$\circledast \int(f+g) = \int f + \int g$$

$$\circledast \int \alpha f = \alpha \int f$$

<u>הוכחה:</u> נובע מיידית מהטענות הדומות על הנגזרת.

<u>תרגיל:</u> ① חשבו: $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}dx = \int\frac{1}{x^2} - 2\int\frac{1}{x} + \int 1 = -\frac{1}{x} - 2\log|x| + x + C$$ ▪

(ב- $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$)

② חשבו: $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\int\sqrt{x-1} = \frac{1}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{3/2} + C$ ▪

③ $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

המשך תרגול 1 חדו"א 2

④ $\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \int(\log(1+x^2))' = \log(1+x^2)+C$

⚠ **הכללה**: • אם f גזירה וחיובית $f>0$ אזי: $\int \frac{f'}{f} = \log f + C$

• אם f גזירה ו- $f\neq 0$ אזי: $\int\frac{f'}{f} = \log|f|+C$

טענה דומה: אם f גזירה אזי $\boxed{[e^{f(x)}]' = f'(x)e^{f(x)}}$ ולכן:

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)}+C$$

דוגמא: $\int x e^{x^2/2}dx = e^{x^2/2}+C$

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים

טענה: תהיינה $u,v: I\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות אזי: $\boxed{\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v}$

הוכחה: ככלל $(u\cdot v)' = u'v+uv'$

$\Rightarrow u\cdot v = \int(u\cdot v)' = \int u'v + \int uv'$

דוגמאות:

• $\int x\cos x = \int x(\sin x)' = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x = x\sin x + \cos x$

• $\int e^x x = \int x(e^x)' = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C$

• $\int \log(x) = \int \log x\,(x)' = x\log x - \int\frac{1}{x}\cdot x = x\log x - x + C$

• $\int x^3\log x = \int(\frac{x^4}{4})'\log x = \frac{x^4}{4}\log x - \int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^4\log x}{4} - \frac{x^4}{16}+C$

• $\int x^3\cdot\log^2 x = \int(\frac{x^4}{4})'\log^2 x = \frac{x^4}{4}\log^2 x - \int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{2\log x}{x} = \frac{x^4}{4}\log^2 x - \frac{1}{2}\int\log x\cdot x^3 =$

$\overset{\text{חישוב קודם}}{=} \frac{x^4}{4}[\log^2 x - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{8}]+C$

⚠ בפתרון ניתן לחשב באופן זה כל אינטגרל מהצורה

$\int P(x)\log^k x,\quad \int P(x)\sin x,\quad \int P(x)e^x$ ($P(x)$ פולינום, אחרת).

• $\int\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} = \int\log(\sin x)(\tan x)' = \log(\sin x)\cdot\tan x - \int\tan x\cdot\frac{\cos x}{\sin x} =$

$\log(\sin x)\tan x - x + C$

• $\int\arctan x = \int\arctan x\,(x)' = x\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2} =$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$

• $\int e^x\cos x = \int e^x(\sin x)' = e^x\sin x - \int e^x\sin x = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x$

$\overset{\text{העברת אגפים}}{\Rightarrow} \int e^x\cos x = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

החלפת משתנים 8

תיזכורת: נניח שמצאנו ל- $f(t)$ הפונקציה $F(t)=\int f(t)dt$

חפש אינטגרל $\int f(ax+b)$, $a\neq 0$. אזי: $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}$

משפט: נניח ש f בעלת קדומה $F(t)=\int f(t)dt$ ו- $g(x)$ פונ' גזירה

אזי: $\boxed{\int f(g(x))g'(x)=F(g(x))}$

הוכחה: ע"פ כלל השרשרת: $(F(g(x)))'=f(g(x))\cdot g'(x)$ ∎

⚠ דרך נוחה לסמן זאת (השוואה הגדרה): $t=t(x)=g(x)$ נקבל:

$$\boxed{\int f(t(x))\cdot t'(x)dx=\int f(t)dt\Big|_{t=t(x)=g(x)}}$$

דוגמאות:

$$\cdot\int (x-1)^{100}x\,dx\ \left[\begin{matrix}t(x)=x-1\\ t'(x)=1\end{matrix}\right]$$

$$=\int \underbrace{(x-1)^{100}x}_{f(t(x))}\cdot\underbrace{1}_{t'(x)}\underset{f(t)=t^{100}(t+1)}{=}\int t^{100}(t+1)dt=\int t^{101}+\int t^{100}=\frac{t^{101}}{101}+\frac{t^{102}}{102}+C\Big|_{t=x-1}=$$

$$=\frac{1}{101}(x-1)^{101}+\frac{1}{102}(x-1)^{102}+C$$ ∎

סימון (לא נכון חלק): תזכורת סימון לייבניץ: $f'(x)=\frac{df}{dx}$

במקרה שלנו, עבור $t=t(x)$ נרשום: $dt=\frac{dt}{dx}\cdot dx=t'(x)\cdot dx$

$$\cdot\int(2x+1)^{10}dx=\int t^{10}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{t^{11}}{22}+C\Big|_{t=2x+1}=\frac{(2x+1)^{11}}{22}+C$$

$$\left(\begin{matrix}t=2x+1\\ dt=\underbrace{2}_{t'(x)}\cdot dx\end{matrix}\right)$$

⚠ **הערה**: אם $t(x)$ פונ' הפיכה, ניתן להיעזר בכלל החלפת המשתנים

"מימין לשמאל". ⇐ $\int f(x)dx=\int f(x(t))x'(t)dt\Big|_{t=t(x)}$

$$\cdot\int x^2(x^3+2)^{1/5}dx=\int(x^3+2)^{1/5}\cdot\frac{(x^3+2)'}{3}dx\underset{t=x^3+2;\ dt=t'(x)dx=3x^2dx}{=}\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}dt=\frac{5}{18}t^{\frac{6}{5}}+C\Big|_{t=x^3+2}=\frac{5}{18}(x^3+2)^{\frac{6}{5}}+C$$

$$\cdot\int\frac{dx}{x\log x}\underset{t=\log x,\ dt=\frac{1}{x}dx}{=}\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log|\log x|+C$$

כיוון הפוך:

$$\cdot\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx=\left[\begin{matrix}x=t^2,\ t\geq 0 -\text{ח"ח}\\ dx=2t\,dt\end{matrix}\right]=\int\frac{2t\,dt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{1}{1+t^2}dt=2\arctan t+C\Big|_{t=\sqrt{x}}$$

$$=2\arctan\sqrt{x}+C$$

$$\cdot\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\underset{x>1}{=}\left[\begin{matrix}x=\sqrt{t^2+1},\ t\geq 0\ (\Leftrightarrow t=\sqrt{x^2-1})\\ dx=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt\end{matrix}\right]=\int\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\sqrt{t^2+1}\cdot t}dt=\int\frac{1}{t^2+1}dt=\arctan t+C\Big|_{t=\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\arctan(\sqrt{x^2-1})+C$$

המשך תרגול 1 חדו"א 2

> ⚠ **הערה:** נגזרת של פונ' זוגית היא אי זוגית, ונגזרת של פונ' אי זוגית היא זוגית!

אותו התרגיל בדרך נוספת...

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \begin{bmatrix} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= -\int \frac{t}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} \cdot \frac{dt}{t^2} = -\int sgn(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = ⊛$$

$$⊛ = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin(t)+c' = -\arcsin\left(\tfrac{1}{x}\right)+c'$$:אז $t>0$,$x>0$ בתחום

⇐ מסקנה: קיימים $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ כך ש- $\boxed{\arctan(\sqrt{x^2-1})+C_1 = -\arcsin\left(\tfrac{1}{x}\right)+C_2}$

- $$\int \frac{\log^2 x}{x}dx = \begin{bmatrix} x=e^t \\ dx=e^t dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{e^t}\cdot e^t dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{(\log x)^3}{3}+C$$ //

- $$\int \frac{\log^2 x}{x}dx = \begin{bmatrix} t=\log x \\ dt=\frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{(\log x)^3}{3}+C$$

⚠ תרגיל מחשבה: מצאו את המשפט על הנגזרת של הפונ' ההפוכה:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{\frac{dt}{dx}}\right)$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{bmatrix} x=t^6,\ t>0,\ \text{חח"ע} \\ dx=6t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = \int \frac{6t^3}{1+t}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3+1}{t+1}dt - 6\int \frac{dt}{1+t} = 6\int(1-t+t^2)dt - 6\int\frac{dt}{1+t} = 6\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ln(1+t)\right)+C\Big|_{t=\sqrt[6]{x}} =$$

$t^3+1=(t+1)(1-t+t^2)$ ← סכום של סדרה הנדסית

$$= 6\left(\sqrt[6]{x}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\ln(1+\sqrt[6]{x})\right)+C \ \blacksquare$$

- $$\int (x-x^3)e^{x^2}dx = \begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int(1-t)e^t dt = \frac{1}{2}\left(\int e^t dt - \int te^t dt\right) =$$ תרגיל ממקודם

תחום: $x>0$

$$= \frac{1}{2}(e^t+e^t-te^t)+C = \frac{1}{2}e^{x^2}(2-x^2) \ \blacksquare$$

- $$\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\tan x\cdot\cos^2 x} = \begin{bmatrix} t=\tan x \\ dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}dt =$$

ב- $(0,\pi/2)$

$$= \log t + C\Big|_{t=\tan x} = \log(\tan x)+C \ \blacksquare$$