

19 תורת פורייה

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_N(t)$$

דבור $f \in R(\mathbb{T})$

Feier וטוב

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה $\sigma_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$, $f \in C(\mathbb{T})$ ו

⚠ $\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (f * D_N)(t) = f * \left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_N(t) \right)$

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_N(t)$$

הגדרה גרעין פיון:

⚠ היתרון העצום של F_N על D_N הוא הוסיבות שלו.

$F_N \geq 0$ וטוב, $F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((\frac{N+1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$ ① נורמל

$$F_N(0) = N+1$$

$$\forall N. \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$$
 ②

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$$

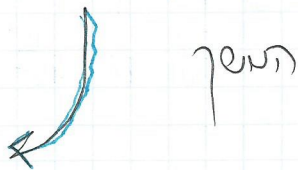
כל פ"ר

הוכחה:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$$
 ②

$$D_N(0) = 2N+1$$

$$F_N(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_N(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (2k+1) \overset{\text{השקונו}}{=} \frac{(N+1)^2}{N+1} = N+1 \checkmark$$
 ①



הכנסת הנכנסת : $F_N = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((\frac{N+1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e^{ikt} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^N (N+1-|k|) e^{ikt}$$

הכנסת הנכנסת : $\left(\sum_{k=0}^N e^{ikt} \right)^2 = \sum_{k=0}^N e^{ikt} \cdot \sum_{j=0}^N e^{ijt} = \sum_{k,j=0}^N e^{i(k+j)t} = \sum_{\ell=0}^{2N} \left(\sum_{\substack{k+j=\ell \\ k,j=0 \dots N}} 1 \right) e^{i\ell t}$

נשנה את הכנסת : $k = \ell - N$

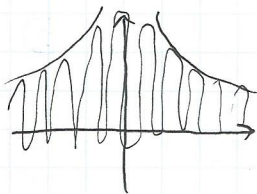
$$\left(\sum_{k=0}^N e^{ikt} \right)^2 = \sum_{k=-N}^N (N+1-|k|) e^{i(k+N)t} = e^{iNt} (N+1) \cdot F_N(t)$$

דבר זה : $F_N(t) = \frac{1}{N+1} \cdot e^{-iNt} \cdot \left(\sum_{k=0}^N e^{ikt} \right)^2 = \frac{1}{N+1} e^{-iNt} \cdot \left(\frac{e^{i(N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right)^2 = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((\frac{N+1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$

$\frac{e^{-iN} \cdot \frac{e^{i(N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{\frac{it}{2}}}{e^{it} - 1} \cdot (e^{i(\frac{N+1}{2})t} - e^{-i(\frac{N+1}{2})t}) = e^{\frac{it}{2}} \cdot e^{-\frac{it}{2}} \cdot 2i \sin(\frac{(N+1)}{2}t) =$

$$= \frac{1}{2i \sin(\frac{t}{2})} \cdot 2i \sin(\frac{(N+1)}{2}t) = \frac{\sin(\frac{(N+1)}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}$$

וזה $0 < \varepsilon$: $\forall N > N_0$: $\int_{-\pi}^{\pi} F_N + \int_{\pi}^{\pi} F_N < \varepsilon$



(בעצם, כח שמשכיך את N , השטח הכולל מתחת גרף נשאר 1, אבל התרומה בסביבת 0 הולכת וקטנה)
הוכחה:

כזכור, עבור $0 \neq t \in (-\pi, \pi)$: $F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((\frac{N+1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$

כפיט אפ $|F_N(t)| \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}$ עבור $0 < |t| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\sin t| \geq \frac{2|t|}{\pi}$ מכיוון ש-

$\forall t \in (-\pi, \pi), |t| > \delta \Rightarrow |F_N(t)| \leq \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{1}{(\frac{2}{\pi} \delta)^2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4(N+1)} \cdot \frac{1}{\delta^2} \leq \frac{\pi^2}{4\delta^2} \cdot \frac{1}{N+1}$

מקבילים ש- $\sup_{t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)} F_N(t) \leq \frac{\pi^2}{4\delta^2} \cdot \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

כזכור $F_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ במשך בקטע $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ וכן $\int_{-\pi}^{\pi} F_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ובעזרת קרייט N_0 קי- $\forall N > N_0, \int_{-\pi}^{\pi} F_N + \int_{\pi}^{\pi} F_N < \varepsilon$

הוכחת משפט Fejer : תהי $f \in C(\mathbb{T})$. חזים מחזירה ש-

"חזיה מחזירה" $f \star F_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ (אלמנטים של F_N היא "חזיה מחזירה" כי הם מקטגוריה).

יהי $0 < \varepsilon < 1$. הפונ' f רציפה במשך δ $[-\delta, \delta]$. אזי קיימת N_0 כך

$\forall x, y \in [-\delta, \delta], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

הכּוּסֵאָה הַדּוֹלִים 19:

המשך הוחתם על שם @ @ :
 06/01

$$M = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$$

מחצית, אנו יודעים ש"פ כולל 100 ק"ג.

$$\forall N \geq N_0: \int_{-\pi}^{-\delta} F_N + \int_{\delta}^{\pi} F_N < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\forall N \geq N_0 \quad |f * F_N(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \quad : \text{מכאן } \forall x \in [a, b] \quad x \in [a, b]$$

סוגר ח.3.8 שהיה 0-
 $\sup_{x \in [-1, 1]} |f * f_{\alpha}(x) - f(x)|$ הן כרצונו, ונקט התכנות קטן.

$$f * F_N - f$$

∴ $\exists c, x \in [-\pi, \pi]$ 'ii'

$$\sum F_n = 1, \text{ also } f(x)$$

$$|f * F_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) f(x-t) \frac{dt}{2\pi} - f(x) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) [f(x-t) - f(x)] \frac{dt}{2\pi} \right| \leq \left| \int_{-\delta}^{\delta} \right| + \left| \int_{-\pi}^{-\delta} \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \right|$$

נחתם את האינטרסקי (כנס את הערך המוחלט לתוך האינטרסקי, רק מציג)

$$* \quad |I| \leq \int_{-\delta}^{\delta} F_N(t) |f(x+t) - f(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{-\delta}^{\delta} F_N(t) \cdot \varepsilon \cdot \frac{dt}{2\pi} \leq \varepsilon \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) \frac{dt}{2\pi} = \varepsilon \quad \checkmark$$

$|H| < \delta$ $\Rightarrow$ קטן מספיק $x, x-t \in [-2\pi, 2\pi]$

$$* \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_u(t) |f(x-t) - f(x)| dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} F_u(t) \cdot 2M \cdot \frac{dt}{2\pi} \left. \vphantom{\int_{-\pi}^{\pi}} \right\} \left| \int_0^{\pi} F_u(t) dt + \int_{-\pi}^0 F_u(t) dt \right| \leq \frac{2M}{2\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 F_u(t) dt + \int_0^{\pi} F_u(t) dt \right] \leq \frac{2M}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$$

$$* \left| \int_0^\pi 1 \right| \leq \int_0^\pi F_N(t) \cdot 2M \cdot \frac{dt}{2\pi}$$

$$\checkmark \quad \left| \int_{-\delta}^{\delta} \right| + \left| \int_{-\pi}^{-\delta} \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \right| < 2\varepsilon$$

: 128

אמזכר תיכונן: זכר אסמא נא (מזכר) פ' ק' ז'.

$$\forall N \geq N_0, x \in [-\pi, \pi]. \quad |f * F_N(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

והיכרות התרבות במ"ס

הוכחת בעצם: תנאי $0 \leq \mu \leq 1$ בזרימה של זרימה וחזרה - μ כך $0 \leq \mu \leq 1$

$$\textcircled{1} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$$

② $\forall \delta > 0, \int_{-\pi}^{\pi} K_N + \int_0^{\pi} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

$\forall f \in C(\mathbb{T})$, $\sup_{[-\pi, \pi]} |f * K_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: למשפט פאט, משפט פאט

$$f \equiv g \iff \forall n \in \mathbb{Z} \quad \hat{f}(n) = \hat{g}(n) \iff f, g \in C(\mathbb{T}) \iff \text{1. 1. 1. 1. 1.}$$
$$g \xleftarrow{u} \sigma_n g = \sigma_n f \xrightarrow{u} f \quad \text{OK} \quad \sigma_n f \equiv \sigma_n g \quad \text{אז כן} \quad S_n f \equiv S_n g \quad \text{הוכחה}$$
$$f \equiv g \quad |D_S|$$

בספרך 2 (זכאו 12) משל (ו"הסמך 8) ירחיך סמך (סו"מ"ס אוסד"ר"ס).

תהי, $f \in C(\mathbb{M})$, $\varepsilon > 0$ וכל η פונקציית η סטוכסטיקה p (מסומנת באות η) η η

$$\sup_{t \in [T, T+1]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon$$

Fejer ת"ס N ק ב-

מספר: מפתח

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k f$$

(פונקציה סריג)

ושיקף ב- $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_N f(x) - f(x)| < \varepsilon$

אפשר להסיק מסוף את משפט ויינשטראס עם קריטריון סריג פונקציה אדסה

משפט ויינשטראס: $f \in C(\mathbb{T})$ אם ε קריטריון אדסה

ק ב- $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$ (תחת: שיקף)

שלב 1: מפתח ב נוסם שיש $f \in C(\mathbb{T})$ פונ' כזוית את אפשר להקריב במ"ס

ז"ל $\sum_{k=0}^N a_k \cos(kt)$ (אם איננה זכית זרר) $\left(\sum_{k=-N}^N a_k e^{ikx} \right)$

הסבר: אם p מקרב את f שיהא כזוית אז $\frac{p(x) + p(-x)}{2}$ מקרב את f עם

אותו חוסם. אם $p(x) = \sum a_k e^{ikx}$ אז $\frac{p(x) + p(-x)}{2} = \sum_{k=0}^N (a_k + a_{-k}) \cos(kx)$

שלב 2: כן פונק מרחיבה $\sum_{k=0}^N a_k \cos(kx)$ אפשר להשיק עם כזוית $\sum_{k=0}^N b_k \cos^k(x)$ (אותו N)

הסבר: מכפיק ושיק את $\cos(kx)$ כזוית זכית. $1, \cos x, \dots, \cos^k x$

אפשר להוויח באינדוקציה בעזרת הקוסין $\cos((k+1)x) = 2 \cos(kx) \cos x - \cos((k-1)x)$ (הגזירה הקדונה)

שלב 3: בהינתן $f \in C(\mathbb{T})$ נבחר $g(t) = f(\cos t)$ $t \in \mathbb{R}$

אם g פונ' חד-מחזורית, נבחרת ורציפה.

נשיב ב זכית ε קריטריון N, $a_0, \dots, a_N$ $f(\cos x)$ ב-

$\forall t \in [-\pi, \pi] \cdot |g(t) - \sum_{k=0}^N a_k \cos^k(t)| < \varepsilon$

ז.כ. $x = \cos t$ אז $\forall x \in [-1, 1] \cdot |f(x) - \sum_{k=0}^N a_k x^k| < \varepsilon$

□