חדוא ~~דו~~ 18

קונבולוציה [3]

<u>הגדרה:</u> יהיו $f,g\in R(\mathbb{T})$. עבור $x\in\mathbb{R}$ נסמן: $f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$

שתי תכונות שמצדיקות חן:

① הקונבולוציה $e_k(x)=e^{ikx}$ משחזרת מחובר בטור פורייה, כלומר:

אם $f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$ אזי $e_n*f=\hat{f}(n)e_n$

הוכחה: $e_n*f(x)=\int_0^{2\pi}e^{in(x-t)}f(t)\frac{dt}{2\pi}=e^{inx}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}=\hat{f}(n)\cdot e^{inx}$

② בתרגול: הקונבולוציה $f*g$ היא פונ' רציפה (ו- 2π מחזורית)

תכונות סטנדרטיות של קונבולוציה:

① קומוטטיביות - $f*g=g*f$:

$$f*g(x)=\int_0^{2\pi}f(\underbrace{x-t}_{s})g(\underbrace{t}_{x-s})\frac{dt}{2\pi}\underset{s=x-t}{=}\int_{x}^{x-2\pi}f(s)g(x-s)\frac{-ds}{2\pi}=$$

$$=\int_{x-2\pi}^{x}g(x-s)f(s)\frac{ds}{2\pi}=\int_0^{2\pi}g(x-s)f(s)\frac{ds}{2\pi}=(g*f)(x)$$

② לינאריות: $f*(\alpha g+\beta h)=\alpha(f*g)+\beta(f*h)$: נובע מלינאריות האינטגרל

$$f*(\alpha g+\beta h)=\int_0^{2\pi}f(x-t)[\alpha g(t)+\beta h(t)]\frac{dt}{2\pi}=\alpha\int_0^{2\pi}f(x-t)g(t)\frac{dt}{2\pi}+\beta\int_0^{2\pi}f(x-t)h(t)\frac{dt}{2\pi}$$

באופן דומה - בנוסף מהו קומוטטיביות: $(\alpha g+\beta h)*f=\alpha(g*f)+\beta(h*f)$.

③ אסוציאטיביות: $(f*g)*h=f*(g*h)$

④ קונבולוציה עוברת כפל תחת טור פורייה:

$$\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)\qquad\forall f,g\in R(\mathbb{T}),n\in\mathbb{Z}$$

← את תכונות 3,4 לא נוכיח כי הן משתמשות בהחלפת סדר האינטגרציה. נזכיר כמה - ההוכחות מסתמכות על החלפת סדר האינטגרציה. נזכיר שאם פונ' רציפה $f(x,y)$ אינטגרבילית על $[0,1]^2$ אזי אפשר

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy\leftarrow\text{(משפט פוביני)}$$

כפל והופכי עבודת קונבולוציה:

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx},\quad g\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{g}(n)e^{inx}$$

$$f*g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\hat{g}(n)e^{inx}\qquad fg\approx\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\hat{g}(m)\underbrace{e^{inx}e^{imx}}_{e^{i(n+m)x}}$$

<u>טענה:</u> תהי $f\in R(\mathbb{T})$ ויהי p פולינום טריג' ממעלה $\le N$. אזי גם $f*p$ היא פולינום טריג' ממעלה $\le N$.

הוכחה ↙

הוכחת הטענה: $p(x)=\sum_{n=-N}^{N}a_n e^{inx}$. נרשום $p(x)=\sum_{n=-N}^{N}a_n e_n$, ואז

$$p*f=\Big(\sum_{n=-N}^{N}a_n e_n\Big)*f=\sum_{n=-N}^{N}a_n\underset{\hat f(n)e_n}{\underset{\shortparallel}{(e_n*f)}}=\underbrace{\sum_{n=-N}^{N}a_n\hat f(n)e_n}_{\text{פולינום טריגו'}}$$ ∎

מטרתנו - לחקור התכנסות נקודתית של טור פורייה בעזרת קונבולוציה.

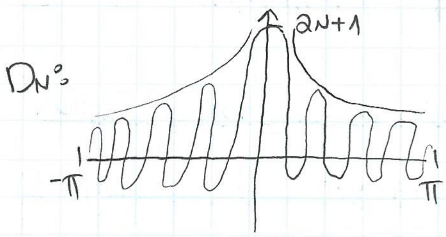
גרעין דיריכלה

הגדרה: נסמן עבור $x\in\mathbb{R}$ ו- $N\geq 0$ את הפונ' המחזורית:

$D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}$ – גרעין דיריכלה. (פולינום טריגו' ממעלה N)

תכונות בסיסיות:

משפט: תהי $f\in R(\mathbb{T})$, $S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}\hat f(n)e^{inx}$. אזי:



1. $S_N=f*D_N$
2. $\forall x\in\mathbb{R}, N\geq 0:\ |D_N(x)|\leq 2N+1$
3. $D_N(x)=\begin{cases}\frac{\sin((N+\frac12)x)}{\sin(\frac{x}{2})} & x\underset{2\pi k}{\neq}0\\ 2N+1 & x\underset{2\pi k}{=}0\end{cases}$

הוכחה:

1. $D_N=\sum_{-N}^{N}e_n \Leftarrow$ $f*D_N=f*\Big(\sum_{-N}^{N}e_n\Big)=\sum_{-N}^{N}(f*e_n)=\sum_{-N}^{N}\hat f e^{inx}=S_N$ ✓

2. $|D_N(x)|=\Big|\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}\Big|\underset{\Delta}{\leq}\sum_{n=-N}^{N}|e^{inx}|=\sum_{n=-N}^{N}|1|=2N+1$

3. עבור $x=0$: $D_N(0)=\sum_{n=-N}^{N}e^{in\cdot 0}=\sum_{n=-N}^{N}1=2N+1$

עבור $x\neq 0$: $D_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}e^{ikx}\underset{\text{טור הנדסי}}{=}\frac{e^{-iNx}-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{\frac{ix}{2}}}{1-e^{ix}}\left[e^{-i(N+\frac12)x}-e^{i(N+\frac12)x}\right]=$

$$=\frac{1}{e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}}\left[-2i\sin((N+\tfrac12)x)\right]=\frac{-2i\sin((N+\frac12)x)}{-2i\sin(\frac{x}{2})}$$ ∎

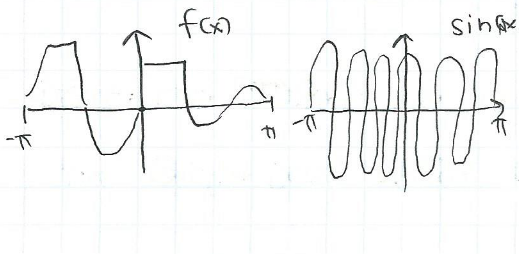
תזכורת - הלמה של רימן לבג: אם $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\hat f(n)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

מסקנה: תהי $f\in R(\mathbb{T})$, אזי

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(Nx)\frac{dx}{2\pi}\xrightarrow{N\to\infty}0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(Nx)\frac{dx}{2\pi}\xrightarrow{N\to\infty}0$$

ואפילו $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(\underbrace{(N+\tfrac12)}_{\text{תרגיל בית}}x)\frac{dx}{2\pi}\xrightarrow{N\to\infty}0$.



$\Rightarrow$ כשמחשבים את $\int f(x)\sin(Nx)$ מכפילים חלק מ-f עם מקדם חיובי וחלק עם מקדם שלילי.

יש קיזוז - והאינטגרל בסכום יוצא 0.

המשך חדוא 18:

<u>הוכחת הטענה</u>: מתוך רימן לבג:

$$\frac{e^{iNx}+e^{-iNx}}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\frac{dx}{2\pi} = \frac{\hat f(N)}{2}+\frac{\hat f(-N)}{2} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{מרימן לבג}} 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\frac{dx}{2\pi} = \frac{\hat f(N)-\hat f(-N)}{2} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(\left(N+\tfrac12\right)x\right)\frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{f(x)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)}^{g(x)\in R(\mathbb{T})}\sin(Nx) + \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{f(x)\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)}^{h(x)\in R(\mathbb{T})}\cos(Nx)$$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

שני האינטגרלים $\xrightarrow{N\to\infty} 0$. ◻

התכנסות נקודתית של טור פורייה:

ראינו כבר: התכנסות ב- L_2 (לכל $f\in R(\mathbb{T})$)

במ"ש עבור $f\in C^1$.

<u>הגדרה</u>: פונק' $f\in R\to\mathbb{C}$ מקיימת <u>תנאי ליפשיץ מקומי</u> בנק' $x_0\in\mathbb{R}$ אם:

$$\exists \delta, M>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), \quad |f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|$$

ברור שפונק' גזירה עם נגזרת חסומה - מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי (מלגרנז').

גם $f(x)=|x|$ מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי בכל $x_0\in\mathbb{R}$ (זה רק מקומי, במעשה גלובלי).

<u>משפט</u>: תהי $f\in R(\mathbb{T})$, $x_0\in\mathbb{R}$ ו- f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי בנק' x_0,

אזי $S_N(x_0)\xrightarrow{N\to\infty} f(x_0)$

<u>הוכחה</u>: עבור $D_N(x)=\frac{\sin((N+\frac12)x)}{\sin(x/2)}$ גרעין דיריכלה. אזי:

$$S_N(x_0)=(f*D_N)(x_0)$$

$$S_N(x_0)-f(x_0)=(f*D_N)(x_0)-f(x_0)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t)D_N(t)\frac{dt}{2\pi}-f(x_0)$$

נשים לב ש- $1=\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\frac{dt}{2\pi}$, כי

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\right)\frac{dt}{2\pi}=1$$

רק $k=0$ תורם כפל מחזור אחד (וגם האינטגרל על כל מחזור של כל השאר הוא 0).

לכן

$$S_N(x_0)-f(x_0)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]\frac{\sin((N+\frac12)t)}{\sin t/2}\frac{dt}{2\pi}=$$

$f(x_0)$ לא תלוי ב- t - מכי'. אז נכפול ב- SD_N ונקבל $f(x_0)$.

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\left(N+\tfrac12\right)t\right)\frac{dt}{2\pi}$$

מטרתנו להראות ש- $S_N(x_0)-f(x_0)\xrightarrow{N\to\infty} 0$. כרגע הצגנו את $S_N(x_0)-f(x_0)$

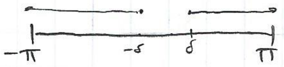
כ- $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(N+\frac12\right)t\right)\frac{dt}{2\pi}$ כאשר $g(t)=\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{\sin(t/2)}$ (עבור $t\neq 0$). ניתן להראות

כי g אינטג' רימן ב- $[-\pi,\pi]$ ~~והמסקנה~~ ומהמסקנה של רימן לבג הדיון מסתיים.

ניתן להסיק מצד $g(t)$ אינט'.

המשך

<u>המשך הוכחה</u>: $g(t)=\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{\sin(t/2)}$



יודעים ש-f מקיימת תנאי ליפשיץ ב-x_0, עם אינדקסים $M,\delta>0$.

לכל $\varepsilon>0$, הפונ' g אינטג' ב-$[\varepsilon,\pi]$ וגם ב-$[-\pi,-\varepsilon]$. למה?

המונה של g הפרש של אינט' ולכן בוודאי אינט', המכנה רציף ולא מתאפס ב-$[\varepsilon,\pi]\cup[-\pi,-\varepsilon]$.

אפשר להניח ש- $\delta<1$. מתנאי ליפשיץ מקומי, ~~$\forall |t|<\delta,\ |g(t)|=$~~

$$\forall |t|<\delta\ ,\ |g(t)|=\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t/2}\right|\cdot\left|\frac{t/2}{\sin(t/2)}\right|\le 2M\cdot\left|\frac{t/2}{\sin t/2}\right|\le C\cdot M$$

חסומה ב-$(-1,1)$

כאשר $C>0$ הוא הקבוע מכפלי. $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\ ,\ |\sin x|\le|x|\ \wedge\ \frac{2}{\pi}\cdot|x|\le|\sin x|$

כי $\sin x$ קמורה בקטע $\Leftarrow C=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$

לסיכום $g(t)$ מקיימת: (1) לכל $\varepsilon>0$ אינט' ב-$[\varepsilon,\pi]$, $[-\varepsilon,\pi]$

(2) חסומה בסביבה של 0. כלומר קיימת δ כך שב-$[-\delta,\delta]\setminus\{0\}$

$$|g(t)|\le\pi\cdot M$$

כעת נו משנה כוזב נגדיר את $g(t)$ ב-0, מתנאים 1 ו-2 נובע שהיא אינט' רימן

בקטע $[-\pi,\pi]$. ■

⚠ תזכורת מהחדו"א הראשון של הקורס-

<u>טענה</u>: נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אינט' ב-$[a+\varepsilon,b]$ לכל $\varepsilon>0$ וחסומה בסביבת a

אזי f אינט' ב-$[a,b]$.

תוצאות על התכנסות נקודתית של טור פורייה:

<u>עובדה 1</u>: לא לכל $f\in R(\mathbb{T})$ ולא לכל $x_0\in\mathbb{R}$: $S_N(x_0)\xrightarrow{N\to\infty}f(x_0)$ (כמעט-קבי' צ'ניחה)

<u>עובדה 2</u>: קיימת פונ' רציפה $f\in C(\mathbb{T})$ כך ש- $S_N(0)\overset{N\to\infty}{\not\to}f(0)$ ולמעשה מתבדרת.

<u>טענה</u>: לכל $f\in C(\mathbb{T})$ ולכל $x_0\in\mathbb{R}$, $\underbrace{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_n(x)}_{\text{ממוצע של } S_0,\ldots S_N}\xrightarrow{N\to\infty}f(x)$ ואפילו ההתכנסות היא במ"ש.