# חדו״א שיעור 17

**תורת פורייה**: השאלה מרכזית $\underline{S_N f \overset{?}{\to} f}$

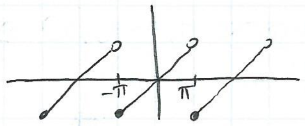
יש לנו מרחב אוניטרי, $R([0,2\pi])$ כך ש- $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}$

$\Leftarrow$ $d(f,g)=\|f-g\|=\langle f-g,f-g\rangle^{1/2}$

**רעיון**: "פונקציות יותר מחוריות $\Rightarrow$ התכנסות "חזקה יותר""

**ראינו**: התכנסות ב-$L_2$ ($\|f-S_Nf\|_{L_2}\to 0$) עבור $f\in R([0,2\pi])$.

**דוגמה**: "$f(t)=t$" $[-\pi,\pi]$



$$\underline{\hat{f}(0)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt=0$$

$$n\neq 0 \quad \underline{\hat{f}(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{f}{t}\cdot \underset{g'}{e^{-int}}=\frac{1}{2\pi}\left[t\cdot\frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-int}}{-in}dt\right]=$$

אינטגרציה בחלקים.

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{i}{n}[\underbrace{\pi e^{in\pi}+\pi e^{-in\pi}}_{2\pi\cos(n\pi)}]-\frac{i}{n}\frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{i}{n}(-1)^n$$

$$\Leftarrow\quad S_Nf=\sum_{\substack{-N\\ n\neq 0}}^{N}\hat{f}(n)e^{int}=\sum_{-N}^{N}\frac{i}{n}(-1)^n(\cos(nt)+i\sin(nt))=\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cdot\sin(nt)$$

כעת מקריטריון דיריכלה להתכנסות במ״ש: $a_n=1/n \downarrow 0$ (לא תלוי ב-t), $b_n=(-1)^n\sin(nt)=(-1)^n\mathrm{Im}(e^{int})=\mathrm{Im}((-e^{it})^n)$

נתמקד בסדרת הסכומים החלקיים של $b_n$:

$$\sum_{i=1}^{N}(-1)^n\sin(nt)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Im}((-e^{it})^n)=\mathrm{Im}\left(\frac{-e^{it}-(-1)^{N+1}e^{i(N+1)t}}{1+e^{it}}\right)$$

הפכנו לחלק המדומה של טור גאומטרי    טור גאומטרי

משפט קריטריון דיריכלה דורש חסימות במידה אחידה, לכן יש לדאוג ש- $|1+e^{it}|>\delta$

ואז נקבל $\sum(-1)^n\sin(nt)\le\frac{2}{\delta}$ חסימות במידה אחידה.

**מסקנה**: לכל $\delta$ $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ מובטחת לנו התכנסות במ״ש $\Leftarrow$ $S_Nf$ מתכנסת לפונקציה רציפה ב- $(-\pi,\pi)$

נשים ♥ ש- $\underline{S_Nf\to t}$ ב- $(-\pi,\pi)$.

**הסבר**. נסמן ב-$g$ את הפונ׳ ש-$S_Nf$ מתכנסת אליה ב- $(-\pi,\pi)$ ($g$ רציפה).

יודעים משיעור שעבר כי $\|f-S_Nf\|_{L_2}\to 0$, $\|g-S_Nf\|_{L_2}\to 0$ $\xRightarrow{\text{א״ש המשולש}}$ $\underbrace{\|f-g\|_{L_2}}_{\text{רציף, כי } f,g \text{ רציפות}}=0$

**טענה (ראינו בעבר)**: פונק׳ רציפה שנורמת $L_2$ שלה $=0$ היא זהותית אפס.

כלומר במקרה זה $f-g\equiv 0$ ($f\equiv g$).

**רעיון להוכחה**: פונ׳ רציפה שאינה אפס $\Leftarrow$ יש סביבה בה היא שונה מאפס.

לכן אם הפונ׳ שאינטגרנד חיובית בסביבה שונה מאפס (גדולה מ-$\varepsilon$), האינטגרל על כל הקטע רק $\ge$ מהאינטגרל על אותה סביבה ולכן נקבל נורמת $L_2$ $\neq 0$ בסתירה.

בשימוש בפרסבל ראינו: $\frac{\pi^2}{3} = \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$

⚠ **תרגיל בית:** קחו את $t=\frac{\pi}{2}$ ותשימו לב כי: $S_N f(\frac{\pi}{2}) \to f(\frac{\pi}{2}) = \pi/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(n\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

כך זה לטורים נוספים..

⚠ **תרגיל בית:** $\boxed{f(t)=\frac{1}{4}(\pi-t)^2}$ $[0,2\pi]$ – לחזור על התרגיל הקודם ולבדוק

**טענה:** תהי $f\in C^1(\mathbb{T})$ הפ' מחזורית $2\pi$ וגזירה ברציפות אזי $\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$

(**בפרט:** $n\hat{f}(n)\to 0$) ← כי $\hat{f'}(n)\to 0$ מהלמה של רימן לבג

**הוכחה:** אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\hat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\Big[f(t)e^{-int}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f\,(-in)e^{-int}\,dt\Big] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f e^{-int}\cdot in = in\hat{f}(n)$$

כי $f$ מחזורית!! ■

באינדוקציה נקבל: $f\in C^k(\mathbb{T}) \Leftarrow$ $\hat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \hat{f}(n)$ ובפרט $n^k\hat{f}(n)\to 0$.

**מסקנה ממה שראינו:** $f\in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|<\infty$ ובפרט $S_N f \xrightarrow{u} f$.

**הוכחה:** מהלמה הקודמת מקבלים $n^2|\hat{f}(n)|^2 = |\hat{f'}(n)|^2$. ולכן לפי פרסבל $\sum_{-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2<\infty$

נשתמש באי"ש הממוצעים: $|\hat{f}(n)| = |\underbrace{\hat{f}(n)\cdot n}_{x}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{y}| \le \frac{1}{2}\Big[\underbrace{|\hat{f}(n)|^2 n^2}_{x^2} + \underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{y^2}\Big]$ (לכל $n\neq 0$)

ולכן אחרי הסכימה נקבל: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)| \le \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 + |\hat{f}(0)| + \frac{\pi^2}{6}<\infty$.

וכעת לפי מבחן M של ויירשטראס מובטחת לנו התכנסות במ"ש ■

כמה מתכנס ל-$f$? אם $S_N f\xrightarrow{u} g \Leftarrow g$ רציפה $\Leftarrow |f-g|^2$ רציפה ⇐ משיקולי רציפות אם $f\neq g \Leftarrow$ אז $0=\|f-g\|^2$).

⚠ כעת אנו יודעים ש- $R[0,2\pi]$: $S_N f\xrightarrow{L_2} f$.

$C^1(\mathbb{T})$: $S_N f\xrightarrow{u} f$.

⚠ **שאלה** – מה לגבי התכנסות נקודתית?

**הגדרה-קונבולוציה:** $f,g\in R(\mathbb{T})$:

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt$$

**טענות:**

(1) $g*f=f*g$ (3) $(cf)*g=c(f*g)$

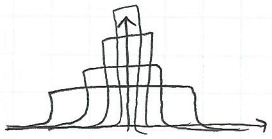
(2) $f*(g+h)=f*g+f*h$ (4) $f*(g*h)=(f*g)*h$

⚠ אבל אין איבר יחידה (ההרגשות הרעות.) – ההרגשות הטובות – מתקשר הדבר עם תורת פורייה.

(5) $\widehat{(f*g)}(n) = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)$ (6) $f*g$ רציפה

(7) $(f*e_k)(x) = e^{ikx}\hat{f}(k)$

# המשך חדוא 17:



**דוגמא חשובה מאוד:**

$$g_n(x)=\begin{cases}4\pi n & [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

מה קורה כשמחשבים $(f*g_n)(x)$ ?

$$(f*g_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,g_n(x-t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{x-1/n}^{x+1/n}4\pi n\,f(t)\,dt\underset{\substack{\uparrow\\ n\to\infty\\ \text{"רציפה } f\text{"}}}{\cong}f(x)$$