

חדו"א

תורת פורייה

$f \in R([0, 2\pi])$, $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ אינ' אנו מחפשים את מרחב מרסר

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$$

באשר מציינים נורמה:

$$P_N(t) = \sum_{-N}^N c_k e^{ikt}$$

פונקציות טריג'.

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

מקדם פורייה k -י.

$$S_N f = \sum_{-N}^N \hat{f}(k) e^{ikt}$$

פונקציות טריג'.

$$\| S_N f - f \| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{שאלה}$$

הצגת תכנית: הבה פסמים $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (נשים גם שמתקור)

$$(S_N f) \in R([0, 2\pi]) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{כך}$$

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \langle f, \bar{e}_{-k} \rangle = \overline{\langle f, e_{-k} \rangle} = \overline{\hat{f}(-k)} \quad \text{הערה: (כתובים)}$$

אם f ממש $k=0$ אז $S_N f$ מתקרב:

$$\hat{f}(-k) e^{-ikt} + \hat{f}(k) e^{ikt} = \hat{f}(k) e^{ikt} + \hat{f}(k) e^{ikt} \in \mathbb{R}$$

הערה: $f - S_N f \perp e_k$ אם $|k| \leq N$ (בפרט) $(f - S_N f) \perp S_N f$

$$\langle f - S_N f, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle \sum_{-N}^N \hat{f}(k) e^{ikt}, e_k \rangle = 0 \quad \text{אלו}$$

$$\| f \|^2 = \| f - S_N f \|^2 + \| S_N f \|^2 \quad \leftarrow \text{משפט פיתגורס}$$

מסלול אישון סט: $f \in R([0, 2\pi])$, אזי $\| S_N f \|^2 \leq \| f \|^2$ ואם נקטוב

$$\sum_{-N}^N |\hat{f}(k)|^2 \leq \| f \|^2 \quad \text{כאשר } N \rightarrow \infty$$

משפט רימן-סטירטג: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \| f \|^2$

מסקנה: $\lim_{N \rightarrow \infty} \| f - S_N f \|^2 = 0$ כל $f \in R([0, 2\pi])$

מסקנה: $\lim_{N \rightarrow \infty} \| f - S_N f \| = 0$ כל $f \in R([0, 2\pi])$

הערה: בהיות $f, f_n \in R([0, 2\pi])$, ואמר $f_n \xrightarrow{L_2} f$ כל $f_n \xrightarrow{L_2} f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 dt = 0$$

⚠️ בהבה אין שם קשר בין ההתכנסות (נקודתית) להתכנסות L_2 .

במל - משהו שמתכנס L_2 אינו א נק' $\dots$

נרמט L_2 אכן מתכנסת, אך התנאי ש $f_n(x)=1$ שכיח וזנך דפני לא מתכנסת נקודתית.

טענה L_2 זוהר

טענה: $f_n, f \in R[a,b]$ $f_n \xrightarrow{L_2} f \iff f_n \xrightarrow{u} f$

הנחה 1: מה צ"ב $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 = 0$

ופי משהו 5.13 אפשר לפתור Δ והתנאי דקור ואן שזה.

$$|f_n - f|^2 = |f_n - f| |f_n - f| \leq |f_n - f| (|f_n| + |f|) \leq M |f_n - f| \Rightarrow |f_n - f| \rightarrow 0 \Rightarrow |f_n - f|^2 \rightarrow 0$$

התנאי דקור ואן שזה

אם מתכנסת בט"ש פנימי חזקה ϵ M זכר מתקיים נגידים (ממנות) סקירה אחת ϵ M .

דן האנטיגון מתקן בט"ש ונקבה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|^2 \rightarrow 0$

הבהבה 2: (ההשגה + פתרון)

$$\|f_n - f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f_n(t) - f(t)|^2 \cdot 1 \right)^{1/2} \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$$

מסקנה מסתגרת שראינו בעברה:

פונקציות הם צפופים במרחב L_2 הרציפות במרחב L_2

(אם $\epsilon \rightarrow 0$ וצפיפות רציפה קיימת פונקציות $(x, a), (x, b), p_n(x)$ כך $\epsilon \rightarrow 0$ $\|f(x) - p_n(x) - i(x, a)\| \rightarrow 0$.)

⚠️ אנחנו באמת חצים: פ' טחול' ופ' אינ'!

טענה 1: $\mathbb{C} \rightarrow R[a,b]$ רציפה $(f(x)=f(2\pi))$. אזי גם סדר ק"פ

פני' טחול' $p_n(x)$ כך $\epsilon \rightarrow 0$ $\sup |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$

טענה 2: $f \in R[a,b]$, אזי גם $\epsilon \rightarrow 0$ ק"פ פני' טחול' $p_n(x)$ כך $\epsilon \rightarrow 0$

$$\|f - p_n\|_{L_2} < \epsilon$$

את טענה 1' נניח בהמשך, כעת נניח את טענה 2' כהנח' 1':

תהי $f \in R[a,b]$ (נניח קרה"ח $f(a)=f(b)=0$ $\leftarrow$ פני' סופי' ϵ $\leftarrow$ משהו).

שלב 1: (אם שאפשר נקודת במרחב L_2 את f פני' רציפה g . יהי $\epsilon < 0$

נבחר חלוקה $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ כך $\epsilon \rightarrow 0$ $w(f, \Pi) < \epsilon$

$$g(x) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} f(x_i) + \frac{x - x_i}{\Delta x_i} f(x_{i+1}) \quad [x_i, x_{i+1}]$$

המשך תדו"ר 16

המשך תדו"ר 16

נשים בסקטור $[x_i, x_{i+1}]$: $f(x_i) \leq g(x) \leq f(x_{i+1})$ או $f(x_i) \geq g(x) \geq f(x_{i+1})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \leq \frac{2M}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{2M}{2\pi} \sum_{i=1}^N \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \leq \frac{2M}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{N} \leq \frac{2M}{2\pi} \frac{\Delta x}{N}$$

↓

מסקנה א' ניתן לקרוא את g כמחזורי f וקפדן L_2 של f ושל g

$$\|f - p_n\|_{L_2} \leq \|f - g\|_{L_2} + \|g - p_n\|_{L_2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

טענה ג': בהינתן $f \in R(\mathbb{T})$, אזי הפונקציה המחזורית N הקרובה

היותר f במרחב L_2 היא $S_N f$.

$$\|f - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}\|^2 \geq \|f - \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{ikx}\|^2, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

המסקנה: (נדרש) $f - S_N f \perp e_k$ $(|k| \leq N)$

$$\|f - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}\|^2 = \|f - S_N f + S_N f - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}\|^2 = \|f - S_N f\|^2 + \|S_N f - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}\|^2 \geq \|f - S_N f\|^2$$

שני המונחים
הראשונים
הוא שני המונחים
הראשונים

מסקנה (תשובה לשאלה):

$$\|S_N f - f\|_{L_2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad f \in R(\mathbb{T}) \text{ אזי}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2$$

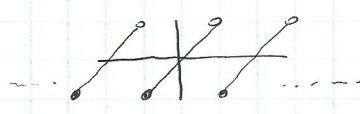
הוכחה:

נשתמש בטענה ג' כדי לקרוא את f במרחב L_2 של f ושל Q_N (כאשר Q_N היא פונקציה מחזורית)

$$\|f - S_N f\| \leq \|f - Q_N\| \rightarrow 0$$

$$\sum_{k=-N}^N |\hat{f}(k)|^2 = \|S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_N f\|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \|f\|^2$$

וכך אכן שוויון בריי.



$$f(t) = t \quad t \in [-\pi, \pi] \quad \hat{f}(k) = \frac{i}{k} (-1)^k, \quad \hat{f}(0) = 0$$

$$S_N f = \sum_{k=-N}^N (-1)^{k+1} \frac{\sin(kt)}{k}$$

היא מתכנסת במישור $(-\pi, \pi)$ ובהפרט מתכנסת ל- f ב- $(-\pi, \pi)$.

10/10/17

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2$$

שילוב של שני תוצאות:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \left(\frac{\pi^3}{3} \frac{\pi^3}{3}\right) \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

דומה לריסון