הרצאה 15

טורי פורייה:

טור חזקות: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

טור Fourier: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

(כזכור $e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx)$)

הבדלים חשובים בין טורי חזקות וטורי פורייה:

* כשרוצים לייצג את f כטור חזקות, מספיק לדעת את ערכי f בסביבת 0, טור פוריה הוא גלובלי.
* מבחינת התאוריה, נוח לקחת מרחב לינארי של פונק', "ולפרק" את כולן ביחד לטור פורייה.

פונק' עם ערכים מרוכבים על הישר:

$f:[a,b]\to\mathbb{C}$ כאשר $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. אפשר לרשום $f=\underbrace{u}_{Re(f)}+i\underbrace{v}_{Im(f)}$ כאשר $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$. פונק' עם ערכים מרוכבים היא זוג פונק' ממשיות.

רוב ההגדרות על פונק' ממשיות אפשריות גם על פונק' מרוכבות.

אינטגרציה: עבור $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ כאשר $Re(f), Im(f)$ אינטג', (נסמן): $\int_a^b f=\int_a^b Re(f)+i\int_a^b Im(f)$

אומרים ש-f אינטג' אם $Re(f), Im(f)$ אינט'.

* $\int_0^1 (x+ix^3)^2\,dx = \int_0^1 [x^2+2ix^4-x^6]\,dx = \frac{1}{3}+2i\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}+\frac{2}{5}i$

האינטגרל עדיין לינארי. אדיטיבי: $\int(f+g)=\int f+\int g$, $\int_a^c=\int_a^b+\int_b^c$

כפל בסקלר מרוכב: אם $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ אינט', $c\in\mathbb{C}$ אז: $\int_a^b(cf)=c\int_a^b f$

למה? נכון לסקלר ממשי. נראה נכונות עבור $c=i$? אם $f=u+iv$:

$$\int if=\int i(u+iv)=\int iu-v=-\int v+i\int u=i\int f$$

⇐ וכה"כ נכון עבור סקלר מרוכב $c=a+ib$.

ניתן גם להצמיד אינטגרל:

$$\int_a^b \bar{f}=\overline{\int_a^b f}$$

גזירה: עבור $f=u+iv:[a,b]\to\mathbb{C}$ (נסמן) $f'(x)=u'(x)+iv'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

אם u,v גזירות ב-x.

* $f(x)=e^{inx} \Rightarrow f(x)=\cos(nx)+i\sin(nx) \Rightarrow f'(x)=-n\sin(nx)+in\cos(nx)=$

$$=in[\cos(nx)+i\sin(nx)]=ine^{inx}$$

גם הלוה

⚠ <u>תרגיל:</u> רשמו והוכיחו: $f=(u+iv)$

(1) עבור $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ גזירה: $(e^f)'=f'e^f$

(2) $(f^n)'=nf^{n-1}\cdot f'$

(3) $(fg)'=f'g+g'f$

<u>ניוטון - לייבניץ:</u> נניח $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ פונק' גזירה ברציפות. אזי: $\int_a^b f'=f(b)-f(a)$

שימו לב כי נכון לחנך המשמש ודק נחנך המדומה.

דוגמא:
$$\int_a^b e^{int}dt=\int_a^b\left(\frac{e^{int}}{in}\right)'dt=\frac{e^{int}}{in}\Big|_a^b=\frac{e^{inb}-e^{ina}}{in}$$

<u>אינטגרציה בחלקים:</u> נניח $g,f=u+iv$ גזירות ברציפות ב- $[a,b]$, אזי $\int_a^b f'g=fg\big|_a^b-\int_a^b fg'$. (נסבר: $(fg)'=f'g+g'f$ גם עבור מרוכבים.

$$\circledast\ \int_{-\pi}^{\pi}te^{int}dt=t\frac{e^{int}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\frac{e^{int}}{in}dt=\frac{\pi e^{in\pi}-(-\pi)e^{-in\pi}}{in}-\frac{e^{int}}{in\cdot in}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=\frac{2\pi\cos(\pi n)}{in}-\frac{1}{in}\cdot\cancel{\frac{e^{in\pi}-e^{in\pi}}{in}}=\frac{2\pi(-1)^n\cdot i}{n}=2\pi i\cdot\frac{(-1)^n}{n}$$

(<u>תזכורת:</u> $e^{it}+e^{-it}=2\cos(t)$, $e^{it}-e^{-it}=2i\sin(t)$)

<u>הכנסת ערך מוחלט לאינטגרל (אי שוויון):</u>

<u>טענה:</u> נניח ש $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ אינט'. אזי גם $|f|$ אינט'! - $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$

<u>הוכחה:</u> $f=u+iv$, אזי $|f|=\sqrt{u^2+v^2}$

אז $|f|$ אינט' (הרכבה (נראה) כי נובע מתנאי' של u,v, רציפות רקחות חלוקות, סכומים רבים וכו'. ("פונ' רציפה של פונק' אינט' - היא אינט'")

כך נראות ש- $\left|\mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right)\right|\le\int_a^b|f|$, $\left|\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right)\right|\le\int_a^b|f|$

שימו לב: $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right)=\int_a^b u\le\int_a^b\sqrt{u^2+v^2}=\int_a^b|f|$.

נתחיל נוכיח את הטענה. נפריד במקרים: אם $\int_a^b f=0$ אין מה להוכיח.

אחרת נסמן $z_0=\int_a^b f\ne 0$ $\in\mathbb{C}$. נגדיר $C=\frac{\overline{z_0}}{|z_0|}$ ונשים לב ש- $|Cz_0|=|C|\cdot|z_0|=|z_0|$. וגם: $Cz_0=\frac{\overline{z_0}}{|z_0|}\cdot z_0=\frac{|z_0|^2}{|z_0|}=|z_0|$

$$\underbrace{\left|\int_a^b f\right|}_{z_0}=C\int_a^b f=\underbrace{\int_a^b Cf}_{\mathbb{R}}=\underbrace{\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right)}_{\mathbb{R}}\le\int_a^b|Cf|\underset{|c|=1}{=}\int_a^b|f|$$

$\blacksquare$

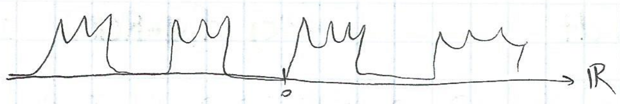
בכלל, היום מכינים את הדרך לקראות $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n\cdot e^{int}$

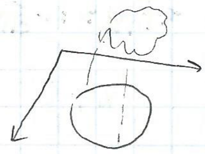
<u>פונק' מחזוריות:</u>

<u>הגדרה:</u> אומרים ש- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ מחזורית עם מחזור T כאשר $T>0$ אם $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+T)=f(x)$

המשך חדו"א 15

דרך נחשוב על פונק' מחזוריות: כפונק' שמוגדרת על המעגל.





הכתיב המתמטי המקובל: נעבוד עם פונק' 2π מחזוריות. נסמן $\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$

כשרושמים $\mathbb{T}$ מזהים בין נק' $x\in\mathbb{R}$ ונק' מהצורה $x+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

אפשר לחשוב על $\mathbb{T}$ כ- $[0,2\pi)$ או $[-\pi,\pi)$

מהרגע הזה, אם כותבים $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$, הכוונה לפונק' 2π-מחזוריות ע"ג $\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: נסמן ב- $R(\mathbb{T})$ את אוסף הפונק' ה-2π מחזוריות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ כך ש-f אינטג' ב- $[0,2\pi]$

<u>תרגיל</u>: עבור $f\in R(\mathbb{T})$ מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} f=\int_{0}^{2\pi} f$

<u>דוגמאות לפונק' 2π-מחזוריות</u>:

<u>הגדרה</u>: פונק' מהצורה $f(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ נקראות פולינום טריגונומטרי מדרגה $\le N$.

(הדרגה היא N אם $0<|c_N|+|c_{-N}|$)

המחזור של הפונק' $e^{int}=\cos(nt)+i\sin(nt)$ הוא $\frac{2\pi}{n}$.

ובפרט e^{int} היא 2π מחזורית. לכן כל פולינום טריג' הוא 2π מחזורי.

למה פולינום? כי ניתן לרשום $f(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n (e^{it})^n$

<u>הערה</u>: אם חושבים על פונק' 2π מחזורית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ כפונק' על המעגל $\{z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$

רושמים $F(\underbrace{e^{it}}_{\text{מעגל}}):=f(\underbrace{t}_{\mathbb{R}})$. ואז $f(t)=\sum c_n e^{itn} \Leftarrow F(z)=\sum c_n t^n$

<u>טענה</u>: כל פולינום טריג' ממעלה N אפשר לרשום כ- $P(t)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\cos(kt)+\sum_{k=1}^{N}\beta_k\sin(kt)$ (*)

עבור $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{C}$, וההפך כל ביטוי מהצורה הזו הוא פולינום טריג'.

<u>הוכחה</u>: $f(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ נרשום $e^{int}=\cos(nt)+i\sin(nt)$, ואז נקבל את הביטוי שרואים מהצורה של (*).

בכיוון השני, נרשום $\cos(kt)=\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$, $\sin(kt)=\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$ ונסדר מחדש.

<u>הערה</u>: אוסף הפולינומים הטריג' מדרגה $\le N$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbb{C}$.

המימד שלו שווה ל- $2N+1$.

נחקור את המרחב הנ"ל, ובאופן כללי יותר נדבר על

מכפלה פנימית על $R(\pi)$:

עבור $f,g\in R(\pi)$ נגדיר $\langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

זה אנלוגי למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{C}^n$: $x,y\in\mathbb{C}^n$, $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$

זה מקיים את תכונות המכפלה הפנימית:

(1) $\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

(3) עבור $\lambda\in\mathbb{C}$: $\langle \lambda f,g\rangle = \lambda\langle f,g\rangle$

(2) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int f\bar g}_{\langle f,g\rangle} \qquad \overline{\frac{1}{2\pi}\int g\bar f} = \frac{1}{2\pi}\int \underbrace{\overline{(g\bar f)}}_{\bar g f}$$

אבל: $\langle f,\lambda g\rangle = \bar\lambda\langle f,g\rangle$

(4) לכל $f\in R(\pi)$: $\langle f,f\rangle \geq 0$

כלומר $\langle f,f\rangle\in\mathbb{R}$ אי שלילי!

סימון: עבור $f\in R(\pi)$ מסמנים: $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2}$

תמיד $\|f\|\geq 0$. מתי יש שוויון? כאשר $\int_0^{2\pi}|f|^2=0$

נשים לב: יש $f\in R(\pi)$ שונה מפונ' האפס עם $\int|f|^2=0$. למשל

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

בד"כ במרחב מכפלה פנימית דורשים $f=0 \iff \|f\|=0$

<u>משפט מהבנ' 3</u>: אם $\int_0^{2\pi}|f|^2=0$, אז f מתאפסת בכל $\mathbb{R}$ פרט לקב' זניחה.

אם מזהים בין 2 פונ' שנבדלות רק בקב' זניחה, אז מקבלים מרחב מכפלה פנימית שמקיים את התכונה הנ"ל.

המרחב $R(\pi)$ עם המכפלה הפנימית שהגדרנו <u>אינו נוצר סופית</u>, הוא ∞-מימדי.

שני אי-שוויונות שמתקיימים בכל מכפלה פנימית והם מאוד:

(1) <u>אי"ש קושי-שוורץ</u>: $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$

איך מוכיחים? משתמשים בעובדה ש- $\langle f-tg, f-tg\rangle \geq 0$

$$= \langle f,f\rangle - t\langle g,f\rangle - \bar t\langle f,g\rangle + |t|^2\langle g,g\rangle$$

ומציבים $t=\frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}$ ומקבלים את קושי שוורץ.

אצלנו המשמעות:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar g \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}|f|^2\int_0^{2\pi}|g|^2}$$

לפעמים רושמים $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f\bar g\,\frac{dt}{2\pi}$.

(2) <u>אי"ש המשולש</u>: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

<u>הוכחה</u>:

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g,f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle =$$

$$= \langle f,f\rangle + 2\mathrm{Re}\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \underset{\substack{CS\\ \text{קושי שוורץ}}}{\leq} \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2$$

$\blacksquare$

המשך 2 תח"מ 15

<u>אורתוגונליות:</u> אומרים ש- $f,g \in R(\mathbb{T})$ אורתוגונליים (מאונכים), ומסמנים $f \perp g$ אם $\langle f,g\rangle = 0$.

<u>פונקציות חשובות מאוד לנו' מאונכות:</u>

⚠ נסמן $e_m \in R(\mathbb{T})$ הוא הפשוט $e_m(t) = e^{imt}$ $t\in\mathbb{R}$

<u>טענה:</u> לכל $m,n\in\mathbb{Z}$,
$$\langle e_m, e_n\rangle = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

<u>הוכחה:</u>
$$\langle e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_m\overline{e_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}\cdot\overline{e^{int}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt$$

אם $m=n$ נקבל: $e^{i(m-n)t}=1$ ולכן
$$\langle e_m, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 = 1$$

אם $m\neq n$ נקבל:
$$\langle e_n, e_n\rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\frac{dt}{2\pi} = \frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}\Big|_0^{2\pi} \underset{\uparrow}{=} 0$$
כי פונ' זהו מחזורית.

<u>מסקנה:</u> הוקטורים/פונ' $\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ הם <u>מערכת אורתונורמלית</u> ב- $R(\mathbb{T})$.

<u>דוגמא:</u> נסמן ב- P_N את מרחב הפולינומים הטריג' ממעלה $\leq N$.
ראינו ש- $\dim_{\mathbb{C}} P_N = 2N+1$. $N\ni n$ שני $\{e_n\}_{n\leq N}$ שייכים ל- P_N, ועוד $2N+1$ פונ' שמהוות מערכת אורת'.

<u>מסקנה:</u> $\{e_m\}_{|m|\leq N}$ הוא בסיס אורתונורמלי ל- P_N.
כלומר לכל $p\in P_N$ מתקיים: $p = \sum_{n=-N}^{N}\langle p, e_m\rangle e_m$. מסמנים $\hat{p}(m) = \langle p, e_m\rangle$

ולסיכום, קיבלנו: לכל פולינום טריג' p ממעלה N לכל היותר:
$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-N}^{N}\hat{p}(n)e^{int}}$$
כאשר
$$\hat{p}(n) = \int_0^{2\pi} p(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$$