

$$(A) \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^n a_k$$

תכונות התכונות

$$(C) \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{k=0}^N a_k$$

טענה: התכונות $(C) \Leftrightarrow (A)$ $\otimes$ התכונות

נכנס יחסית
מחזיק 1

הוכחת $\otimes$: בהפך שבה ראוי פס ק"פ (הצד) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C$ כל $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$$

$$\otimes \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k x^k \quad |x| < 1$$

נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C$ נניח שבה ראוי פס ק"פ (הצד) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C$

מטון שורפים ההתכונות של $\otimes$ הוא 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \quad (1) \quad (k+1) a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

בה"כ מספיק צנח $C=0$ (הכנס) ובה"כ

ניתן להוסיף עקב אי-ההתכונות $a_0, a_1, a_2, \dots$ ההתכונות לא תשתנה

אכן צד' שבה $\otimes$ סדרת (המחזיקים) של (הכנסים)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n > N_0 |a_n| < \varepsilon$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k x^k + (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k x^k$$

כעת נקח סדרת $x \rightarrow 1^-$ ומתק'פ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

הכנס (הכנס) (הכנס) (הכנס)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k x^k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

הכנס (הכנס)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = \frac{1}{1-x^2}$$

טענה:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = (1-x^2) \varepsilon \frac{1}{1-x^2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

ול

כן הבה הימנו מתקם והכנסו של

$$(1-2+3-4+5-6 \dots) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)$$

$$S_n = (1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$$

נניח שבה ראוי פס ק"פ (הכנס)

$$\frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{k+1}{2k+2} & n \text{ odd} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$$

הכנסו או מתקנת! 2 צד'ות חלקים
שני'ם

הכנס

נראה שהטור $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)x^k$ מתכנס אצל:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)x^k = \lim_{x \rightarrow 1^-} - \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^{k+1} x^{k+1}]' = \lim_{x \rightarrow 1^-} - \left[\frac{1}{1+x} \right]' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4}$$

מורה במורה
הצורה נקבעה על ידי
איבר איברי

כרפדה נאט טור חדקות:

תכונות מתקפות: אם הטור $\sum a_k$ מתכנס בהחלט אזי $\sum a_k = \sum a_{p(k)}$ כאשר $n \rightarrow \infty, p(n) \rightarrow \infty$ (כבר הסכימנו לא משנה)

⚠️ עקב מטעם זה אנו נניח כי הטורים מתכנסים בהחלט.

⚠️ הערה: בהתנת 2 טורים מתכנסים בהחלט $\sum a_n, \sum b_n$ אזי גם סכמם

(מורש) של טורים a_k, b_k אזי $\sum r_j = \sum a_k + \sum b_k$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |r_j| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |r_j| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |a_k| + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |b_k| < \infty$$

איתחלתי קודם שצטווה

טענה: סאות תטוי $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j$

הוכחה: נסדר טבור לניותה רכי העם טון סון חסכות סוד:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

הסיבור העם: $\sum_{j=1}^N r_j = \sum_{k=1}^N a_k \sum_{k=1}^N b_k$

כום הטור מתכנס למסק לחשכא (הערתם תת סדרה) ← סמורה זה ער היקוסים

מה זכאי טורי חקת?

$$\sum a_j x^j \cdot \sum b_k x^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k} x^{\ell}$$

מפתח קוש

הנחה: $\sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k} x^{\ell} \rightarrow h(x)$ $\sum_{k=0}^{\ell} a_k x^k \rightarrow g(x)$ $\sum_{k=0}^{\ell} b_k x^k \rightarrow f(x)$

ההסנה הקוצנת נותה $\sum_{k=0}^{\ell} a_k x^k \rightarrow g(x)$ $\sum_{k=0}^{\ell} b_k x^k \rightarrow f(x)$ $\sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k} x^{\ell} \rightarrow h(x)$

$h(x) = f(x)g(x)$

חטפרם כורכבים:

$$z = a + bi$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\bar{z} = a - bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

⚠️ סקורס זה נקבר יקם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, וזה יסבורי ניתן שרת"ח

$$f(x) = g(x) + i h(x) \quad f - \bar{f} = 2i h$$

המשקל חזוה 14

טענה: $z \in \mathbb{C}$ מתקם בהחלט אם $|z| \leq |a| + |b|$

$$|a|, |b| \leq |z| \leq |a| + |b|$$

הטור מתקם בהחלט $\Leftrightarrow$ 2 הטורים (הממשי והממחיר) מתקמים בהחלט.

טור חזוה

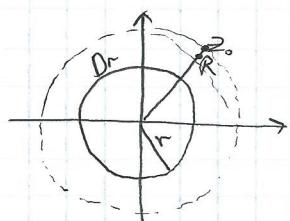
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (c_k \in \mathbb{R})$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + i \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$\Leftrightarrow$ מתקם

משפט: אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ מתקם עבור $z_0 \in \mathbb{C}$, ו $|z| = R$

אז לכל $r < R$ הטור מתקם בהחלט ונמנש על z - $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$



$$\exists f: D_r \rightarrow \mathbb{C}$$

מחרזה אומר במיכזה שטור $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \sup_{x \in D_r} |S_n - f| < \varepsilon \quad \text{where } S_n = \sum_{k=0}^n c_k z^k$$

"ה"רצמא $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

מחזוה 1 הטור מתקם בהחלט בכל $\mathbb{C}$ (כל $z \in \mathbb{C}$)

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!}$ מתקם בהחלט $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

ובטור $\theta = \pi$

וקחון חזוה $\leftarrow$

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} w^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k! j!} z^k w^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(k+j)!} z^k w^{k+j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k = e^{z+w} \end{aligned}$$

המחרזה $\triangle$

$$(e^z)^k = e^{zk}$$

תחזוה $\triangle$ $k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) &= e^{i(2\theta)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \cos \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

$\otimes$