

טור חזקות $\sum a_k x^k$ ($\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$)

תכונות: (חז"ל 1)

טבעי: אם הטור $\sum a_k x^k$ מתכנס ב- x_0 כך של- $|x-x_0| < r$ אזי גם $r' < r$ הטור

מתכנס בהחלט • וממש ב- $[r', r]$.

מסקנה: • מטענת קובנאט - ניתן לבצע אינטגרציה איבר אבר $\sum a_k x^k$ בטור $[r', r]$ $r' < r$

(כ- (r, r) זיגן נוסף)
זכרי האינטגרל האינפיניטסימלי

• פונק' הדפול רציפה (r, r) .

טענה (משפט אקס) + (לכתימה הדמיון): ק"פ R שבה מתכנס סדרות $(-R, R)$

מתכנס עבור $|x| < R$. רזים ההתכנסות נתון ע"י: $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$

מה זכרי זכירות איבר איבר? $f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $f'_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

טענה: נשני הטורים הנ"ל יש את אותה רזים ההתכנסות.

הוכחה: רזים ההתכנסות של "טור חזקות" הטל:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |k+1 a_{k+1}|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

מסקנה: בהתכן $\sum a_k x^k$ בטור רזים ההתכנסות R ונמן $\forall x \in (-R, R) f(x) = \sum a_k x^k$

ומתק"פ: $\forall x \in (-R, R) f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

דמיון

נובע מהמשפט שבו וזכירה, כי שני הטורים מתכנסים קמ"ש בטור $[r', r]$, $r' < r$.

בזמא "משקלה" $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ מתקנס ב- $(-1, 1)$

מתק"פ: $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-1}$ מתכנס ב- $(-1, 1)$

⚠ (כאן עובד מעט ש"תחום ההתכנסות" לא זכרי כשזכרים (מבדקו עו הקבוצות...)

מסקנה מהמסקנה: באותה תהא פ: $\forall x \in (-R, R) \forall m \in \mathbb{N}: f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k k(k-1) \dots (k-m+1) x^{k-m}$

בזמא: $(-1, 1) \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

$\forall x \in (-1, 1) \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ אינטגרציה איבר איבר

מה קורה בהצבות? הטור מתכנס ב- $[-1, 1]$.

⚠ האם השווין (שמו)?

מה תורה בקצוות של רציונליות והתכנסות?

יהי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ סדר רציונליות התכנסת R .

טענה 1: אם הסדר לא מתכנס ב- $x = R$ אזי אין התכנסות במ"ש ב- (R, R) (כלומר: נ"ח שכן הייתה התכנסות במ"ש ב- $(-R, R)$).

אזי נ"ח קריטריון קושי להתכנסות טורי סתם: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N$.

$$\sup_{x \in (R, R)} \left| \sum_{k=1}^m a_k x^k \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^m a_k R^k \right| < \epsilon$$

סכום סופי והסדר

אם נ"ח קריטריון קושי לסדר של מספרים $\Leftrightarrow$ הסדר $\sum a_k x^k$ מתכנס ב- $x = R$ - סתירה!

טענה 2: אם הסדר מתכנס ב- $x = R$ אזי הוא מתכנס בהחלט במ"ש ב- $[0, R]$ ובכך: נ"ח טענת אבסולוטה לרשתות טורי פונקציות:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

$a_k(x)$ $b_k(x)$

$a_k(x)$ רציונליות אחידה (מש"ס" 1), והיא $\searrow 0$.

$a_k(x)$ מתכנסת (נ"ח), במידה שווה ראו תנאי ב- x .

$\Leftarrow$ המסקנה נובעת ישירות מקריטריון אבסולוטה.

|| תחום ההתכנסות ||
כל סדר רציונליות ||

טענה 3: יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}$ סדר רציונליות התכנסות R . אזי אסטרטגיה הנשענת

מתכנסת ב- $|x| < R$ קי- $R - |x|$ אזי ד"ה הסדר המקורי מתכנס ב- x .

הוכחה: מטענה 2 נ"ח שהסדר $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}$ מתכנס במ"ש ב- $[0, R]$. מטענות הקדמות

(ראו מתכנסות) פון רציונליות אינטגרציה. נבצע אינטגרציה איבר איבר (מותר):

$$\int_0^R f(x) dx = \int_0^R \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^R a_k x^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k$$

(הסדר התכנסת במ"ש):

סוגי סכימות

מ"ש: נ"ח $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ אזי $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(הוכחת המ"ש: (רציונליות) $f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k$. יש שני מקרים: $R=1$ (1) $\checkmark$ $R>1$ (2).

מטענה 2 נ"ח שיש התכנסות במ"ש ב- $[0, 1]$. בפרט, פונק' רציונליות רציונליות.

$$f(1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r)$$

והוא

$$\exists \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$$

בגובה: (התכנסות מ"ש אבסולוטה) סוג מתכנסות מ"ש אבסולוטה

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = (A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

המקרה זה נ"ח

דחשך חדל"ח II - 13

שינוי: כן נש' הנעה התנסות $\Leftarrow$ התנסות נש' אלו לא להפך!

1378: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ נא מתנס (א"כ סג' $0 \neq$), אלו כן מתנס נש' אלו!

$$(A) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

הצורה: הטור $\sum a_k x^k$ מתנס נש' צל"ח: p_k

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^N a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n$$

$$(C) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^N a_n$$

מתחזה כה (סמ' 3)

$$M = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^N a_n \underset{\text{תכונ' 1}}{=} \sum_{k=0}^N a_k \left[\frac{N+1-k}{N+1} \right]$$

סמ'ון הא"כר הפל' מסמ'ון:

נלכך מסמ'נה מחזק' 1: אלו $a_n \rightarrow L$ אזי כהר התנסות p : $L \leftarrow$

$\Leftarrow$ התנסות (הצורה) $\Leftarrow$ התנסות נש' צ'ל"ח.

הצורה: התנסות צ'ל"ח $\Leftarrow$ התנסות אלו.

$$S_1 = 0, S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{הוכחה: (סמ' 3)}$$

$$\sum_{k=0}^{N_0} a_k x^k = \sum_{k=0}^{N_0} (S_k - S_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{N_0} S_k x^k - \sum_{k=0}^{N_0-1} S_k x^{k+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{N_0-1} S_k x^k + S_{N_0} x^{N_0}$$

$$S_n = (n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1} \quad \text{שם אלו ה"ס הפל'}$$

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} S_{N_0} x^{N_0} = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} (N_0+1)\alpha_{N_0} x^{N_0} - \lim_{N_0 \rightarrow \infty} N_0 \alpha_{N_0-1} x^{N_0} = 0 \quad \text{שם אלו מתק"פ שם } |x| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = C$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k \quad \text{מסקנת בי"פ:}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\alpha_k x^k \quad \text{באותו האופן:}$$

המשך יבא...