

חדול שינוי 2

צדמאות פסוק M של וירטואל:

(תצבורת: פסוק M של וירטואל = נתונים $M_1, M_2, \dots \in \mathbb{R}$ וניתן שק"מ $u_1, u_2, \dots \in \mathbb{R}$)

ק"ש: ① $\forall x \in [a, b] \quad u_k(x) \leq M_k$ ② $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ מתקנים

$\Leftarrow$ אזי הסדר $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ מתכנס במ"ש ובהחלט!

① $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \sin(\frac{x}{2})$ בקטס $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

ניתן: $|a k^2 \cdot \frac{1}{2^k}| = M_k \geq \sup_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |k^2 x^k \sin(\frac{x}{2})|$

הסדר $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = |a| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ מתכנס (כ"ש) $k^2 \leq (\frac{3}{2})^k$ וכן $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \leq 10 \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3}{2})^k = \frac{10}{1-\frac{3}{2}} = 20$

פסוק M של וירטואל $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \sin(\frac{x}{2})$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

② נניח $|x| < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

רוצים שזכור איבר איבר את $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ ב- $(-1, 1)$.

אילו נצביק? יש נה אחר הו חסר המקור מתכנס (כיון ב $(-1, 1)$).

צריך לבדוק שאר הפסוק מתכנס במ"ש. סדר הפסוק הוא $\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}$.

נראה התכנסות במ"ש ב- $[b, b]$ עבור $b < 1$.

ניקח $M_k = k b^{k-1}$. (הוא זכור איבר איבר ב- $[b, b]$). הוסיף $\sum_{k=1}^{\infty} k b^{k-1}$ מתכנס

כי $b < 1$ (מתכנס השורה) $\rightarrow b < 1 \rightarrow \sqrt[k]{k b^{k-1}} \rightarrow b < 1$

פסוק $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $[b, b]$ $b < 1$ מותר שזכור איבר איבר ב- $[b, b]$.

$\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$

הוכחנו שזכור $x \in [b, b]$ וזאת אם $b < 1$ $\Leftarrow$ הסענו תקפה אם $x \in (-1, 1)$.

אז כן לא מתכנס במ"ש כי הוכחנו שזכור תתקדם סדר אלו עם הפסוק הפסוק.

משפט וירטואל: קיימת פונקציה רציפה ב- (0,1) שאינה זכירה באף נקודה.

van der Waerden

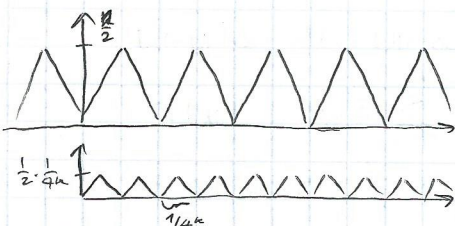
ההוכחה של דאן צר וורצן

פונקציה מסוג $u_0(x) = \begin{cases} x-k & k \leq x \leq k+\frac{1}{2} \\ (k+1)-x & k+\frac{1}{2} \leq x \leq k+1 \end{cases}$

זו פונקציה עם מחזור 1 $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ rescale (כיון מחזור 2)

$u_k(x) = \frac{1}{4^k} u(4^k x)$ זו פונקציה עם מחזור $\frac{1}{4^k}$, והקטומים $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^k}$

u_k לא זכירה במשפט, אבל כאשר היא זכירה הנגזרת שלה $\neq 1$



$$x \in \mathbb{R} \quad \left| f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right|$$

פונקציית טון בן וורצן

נדביר את הפונ

ב: f מוגדרת היטב (הטור מתכנס). רציפה - ונא זכור בשם נקודה.

* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס ונמ"ש $\frac{1}{4^k}$ בקצב בוקן M - ניקח $M_k = \frac{1}{4^k}$.

* f רציפה $\frac{1}{4^k}$ התכנסות במ"ש u_k רציפות.

* f רציפה $\frac{1}{4^k}$ ראשית נכתב f

$$u_k = \frac{1}{4^k} u_0(4^k x), \quad \text{הטור } I \text{ מהצורה } \left[\frac{n}{4^k}, \frac{n+1}{4^k} \right]$$

או מהצורה $\left[\frac{k+\frac{1}{2}}{4^k}, \frac{k+1}{4^k} \right]$ נקרא חצי מחזור u_k .

הן חצי מחזור u_k ליטורית בשפה וג. בנוסף חצי מחזור u_k מכיל 2 מחזורי שמים

של u_{k+1} .

מנה: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ לא זכור באף נקודה.

הוכחה: נניח $x_0 \in \mathbb{R}$. חצים זהירות $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ לא קיים.

שם בקצב $x_n \rightarrow x_0$ ק שרשרת $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ לא מתכנסת.

לא k נבחר Δ_k את חצי המחזור של u_k שאין סיבת x_0 (אם יש ש"ס - נקח למד)

$$\frac{1}{2} \Delta_0 \geq \frac{1}{4} \Delta_1 \geq \dots \geq \frac{1}{2^k} \Delta_k \geq \dots$$

נדביר את x_n זהירות נקודה k - Δ_k ק $\frac{1}{2^k} \Delta_k = \frac{1}{2}$ (אם יש שתיים - נקח למד).

נראה ש $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ אין זכור סופי.

$$f(x_n) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [u_k(x_n) - u_k(x_0)] = \sum_{k=0}^n [u_k(x_n) - u_k(x_0)] + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k(x_n) - u_k(x_0))}_{=0}$$

⊗ $f(x_n) - f(x_0) = u_k(x_n) - u_k(x_0)$ עבור $k \geq n$ וזכור $\frac{1}{2^k} \Delta_k = \frac{1}{2}$ (אם יש שתיים - נקח למד)

של u_k או מחזור של u_{k+1} . לכן $u_{k+1}(x_n) = u_k(x_n)$ וזה הוכח.

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}$$

לסיום:

עבור $k \leq n$ הנקודות x_n ו- x_0 נמצאות באותו חצי מחזור של u_k .

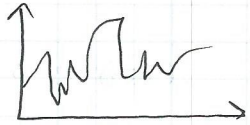
$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1 \quad \forall k \leq n$$

כאשר $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^n \pm 1$. (כבר הכבר) כלומר $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ אינו זכור.

ובנוסף אינו זכור $f'(x)$ - ונא מתכנסת. לכן $f'(x)$ קיימת.

חזון חדוד 12 8

הוא זה דלי של פנינים ב- [1,1] ב- $\mathbb{R}$ (הפנינים מוחזק
מפסיק זכורה !)



משפט הקירוב של וייסטראס: תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אזי כל פונקציה

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

פנינים $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$ קיים. ההוכחה של התהליך עברה "מבוא להסתברות". בהמשך, נראה (הוכחה בעזרת דרגת Fejer).

⚠️ המשפט לא מדבר על טורי חזקות.

נניח שנתונה f רציפה. מהמשפט קיימים פנינים:

$$n=1: a_0 + a_1x + a_2x^2 \approx f \pm O(\frac{1}{n})$$

בכירת פנינים (המקדמים של x^2 משתנה מפנינים לפנינים).

טור חזקות: טור חזקות סבים $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ כאשר $|x| < 1$.

כזית (הכוחות) החזק"י שוי: $a_0, a_0 + a_1x, a_0 + a_1x + a_2x^2, \dots$

המקדמים של x^k קרובים למ"מ פחות כזי. מסירת פנינים!

← עם מסרת פנינים אפשר לקרוב במ"מ של פנין רציפה.

← טור חזקות מתכנס רק צפוף דליות

טור חזקות סבים $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ נסוה כך:

טור חזקות רפי שפאד, מאוד חזק"י (תמשו דליות ∞ פנינים).

רדיוס התכנסות

לפי: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס ב- x , אזי $|x| < R$ (הטור מתכנס בחזקת ופנין ב- $[r,R]$).

הכוח: ידוע ש- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס, בפיט $L = \sup_{x \in [r,R]} |a_k x^k|$ (כי $a_k x^k \rightarrow 0$).

נשתמש בקיון M עם $M_k = L(\frac{r}{|x|})^k$. מיוון $|x| < R$ הטור $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$.

$$|a_k x^k| = |a_k x^k| \cdot \left| \frac{x}{x} \right|^k \leq L \left| \frac{x}{x} \right|^k = L \left(\frac{r}{|x|} \right)^k = M_k \quad \text{כל } x \in [r,R],$$

מסתוב: כל טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ קיים מ"מ ספי $R \in (0, \infty)$ כך ש-

א) הטור מתכנס ב- x אם $|x| < R$

ב) " מתכנס במ"מ ובהחזק ב- $[r,R]$ עם $R < \infty$

הוכחה: $\{ \sum a_n x^n \}$ מתכנס בדאג' $R = \sup$ ונפרד מה

R נקטו רדיוס הוורטמן ש הטור. (המרוכבים זהו רדיוס ש עיאו).

אין מחשבים אותו

טענה: עבור הטור $\sum a_n x^n$ רדיוס הוורטמן $R \in [0, +\infty]$ מקיים:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n}$$

מה הטוינטיאציה? $|a_n| \sim C^n$ $|x| < \frac{1}{C} \Rightarrow a_n x^n$ צועד אקספ' $\sum a_n x^n$ $|x| \sim \frac{1}{C} \Rightarrow a_n x^n$ מאטורי ל-0.