

החלק השני: אינטגרל ווליס

המשפט של ווליס

Wallis

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m t \, dt$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$\sqrt{m} I_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{\pi/2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^k} = \sqrt{k} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^{k-1} \frac{dt}{\cos^2 t} = \sqrt{k} I_{2k-2} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2k-2}} \sqrt{2k-2} I_{2k-2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

נחשבות את: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
 $\frac{dx}{dx} = \frac{\sqrt{k}}{\cos^2 t}$
 $x(t) = \sqrt{k} \tan t$
 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$

$$\int_0^\infty \ln t \cdot e^{-t} dt = -\gamma = -0.577 \dots$$

תכונה:

מה נשאר: אינטגרל ווליס 2

אין מספיק מידע, אי אפשר להחליט אילו מהם הם נכונים

הם מידע בסיסי!

הצגות:

$$\sup |f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad x \in [-1, 1] \quad \text{אפשרות 1}$$

אכן: $f'_n(0) = 1 \neq f'(0) = 0$

מה בין 'צפיפות' המידה? - f'_n מתכנס במהירות אולי תסתכלו על f'

משפט (עצירת והתקבלה במהירות): $f_n, f_2, \dots$ רציפות, $f_1, f_2, \dots$ גזירות בהדרגה

המשפט של ווליס ונראה שהייתה $x_0 \in (a, b)$ קיים

(1) $f(x_0) = f_n(x_0)$ יש אזור מסוים.

(2) הייתה פונקציה g קיימת $f'_n \rightarrow g$ במהירות ב- (a, b) .

אז קיימת $f \in C^1(a, b)$ כך $f_n \xrightarrow{u} f$ ו- $f'_n \xrightarrow{u} f'$

הוכחה:

$$f(x) = C + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

(נראה עכשיו כי f'_n רציפות והיא אזור במהירות זקן רציפה בעצמה).

מה $f'_n \rightarrow f'$ במהירות? כי $f'(x) = g(x)$ וישותח מהר. נותר רק לומר $f_n \xrightarrow{u} f$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - C - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \leq |f_n(x_0) - C| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt$$

המשך

המשך התוכנית:

$$|f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^x |f'_n - g| \leq |f_n(x_0) - c| + |x - x_0| \sup_{[a,b]} |f'_n - g| \leq$$

$$\leq |f_n(x_0) - c| + (b-a) \sup_{[a,b]} |f'_n - g|$$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - c| + (b-a) \sup_{[a,b]} |f'_n - g| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$ $\downarrow n \rightarrow \infty$

וכ"כ:

⚠️ החזקת ההוכחה כזו היא טור פוקציות.

⚠️ יש צרכים של פאונקציות לא אמיתיים! זה יהיה חזק וזה המסקנות הן

"במילים אחרות זהו קטע סופי".

טורי פונקציות

בהנחת טור פונק' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, (כאן $S_n(x)$ או $S_N(x) := \sum_{k=1}^N a_k(x)$)

סדרת הסכומים החזקת.

אומרים גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ מתכנס (נקודתי/במל"ש) אם סדרת הפונ' (a_n) מתכנסת (נקודתית/במל"ש).
אומרים גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ מתכנס בהתכנסות (נקודתית/במל"ש) אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ מתכנס (נקודתית/במל"ש).

דוגמא: הקטע $(0,1)$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ מתכנס (נקודתית!) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

⚠️ ההתכנסות כאן היא לא במידה שווה! כי f_x לא חסומה $\rightarrow (0,1)$ בנקודות.

לסכומים החזקת.

תכונות של טורים ונקודות מתכנסות סדרות פוקציות

① אם $u_n(x)$ זיכרת ו- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במל"ש - אז זה הוא זיכר.

② דיריכלי Dini: אם $u_n(x)$ זיכרת ו- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס (נקודתית) וזיכר.

⬅ יש התכנסות במל"ש.

③ (המשפט אינטגרלי וסכום): נניח u_n זיכרת, הסדר $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במל"ש

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

⬅

④ צורה אינטגרלית: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס במל"ש וקיימת g קטע - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

מתכנס. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס במל"ש ו- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

$$\forall x \in [a, b] \quad |u_k(x)| \leq M_k \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty \quad (2)$$

אזי הסדר $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a, b]$ (אפוא ההחלט ובמ"ש).

הדבר: נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות במ"ש:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ ח.צ. } \exists N \text{ כך } \forall n, m > N \Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |S_n - S_m| < \epsilon$$

$$\text{מכיון ש-} S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \text{ מתכנסים ב-} \epsilon$$

$$\sup_{x \in [a, b]} |S_n - S_m| \leq \sup_{x \in [a, b]} \sum_{k=m+1}^n |u_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k$$

ומכיון ש- $\sum M_k < \infty$ הטלמק"ם קריטריון קושי סומר ול ϵ ק"ס N כך N - ϵ

$$\forall n, m > N \quad \sum_{k=m+1}^n M_k < \epsilon$$

ואז N יתן את ההחלט! $\square$