

10 תכונות של פונקציות

תכונות:

התכונות נקראות:

התכונות המ"ש:

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in I |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$a < 1, [0, a]$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

זכור:

↓ נקודות

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ האם יש מ"ש? נסתם $|f_n - f|$ ונקודות אם זה לא תלוי ב- x .

$$|f_n - f| = \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{-x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+2} \rightarrow 0$$

ה"כ $a < 1$ הפינה מתקנת מ"ש ב- $[0, a]$. אבל תלוי:

בהמשך $[0, 1)$ הסדרה לא מתקנת מ"ש!

רעיון: "התכונות המ"ש שומות על תכונות טובות"

$$(המשפט) \quad f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g \iff g_n \xrightarrow{u} g, f_n \xrightarrow{u} f$$

$$f_n g_n \xrightarrow{u} fg \iff f_n \xrightarrow{u} f, g_n \xrightarrow{u} g \text{ חסומות במידה אחידה}$$

$$|f_n g_n - fg| = |f_n g_n - f_n g + f_n g - fg| \leq |f_n| |g_n - g| + |g| |f_n - f|$$

$$(המשפט) \quad \exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I |f_n(x)| \leq M \quad \text{חסומות במידה אחידה אם:}$$

$$\text{זכור: } (1) \quad g_n(x) = f_n(x) = x + \frac{1}{n} \quad \text{ב- } \mathbb{R}$$

$$(2) \quad f_n \xrightarrow{u} f(x) = x \quad \text{אם } |f_n - f| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ כל תלוי ב- } x$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n g_n - fg| = \sup_{\mathbb{R}} \left| 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = +\infty \quad \text{לכן שני:}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

תלוי: זה טיפוס של $g_n f_n$ $\nrightarrow$

חזרה: תריסרון קושי להתקנת מ"ש של סדרות של פונקציות:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N \forall x \in I |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \iff f_n \xrightarrow{u} f$$

הוכחה:
כיוון חזרה

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{אם } \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} \text{ שבו } n > N, x \in I$$

$$\Rightarrow \forall m, n > N \forall x \in I |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

ניח שההיטרון מתקיים, הנהנתן $\{f_n(x)\} \leftarrow x \in I$ $f_n(x) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow$

יהי כדג נבחר N ק ו- $\forall n, m > N \forall x \in I$:

$$f(x) - \varepsilon \leq \underbrace{f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2}}_{m \rightarrow \infty} < f_n(x) < \underbrace{f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2}}_{m \rightarrow \infty} \leq f(x) + \varepsilon$$

קיסנו את ההצדקה של התכנסות הנ"ל $f_n(x) \xrightarrow{u} f(x)$.

טענה 3: אם $f_n \xrightarrow{u} f$, f_n רציפה $\Leftrightarrow f$ רציפה.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. מהנתון $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in I |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

נקח $N > n$ ונשתמש ברציפות של $f_n(x)$. (קרי:)

** יהי $x_0 \in I$ ק $\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

כעת:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

העצם קיבנו שזה מתקיים $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

שאנו שוכנאי נוצא: אם $f_n \xrightarrow{u} f$, f חסמה ואם f_n חסמה הנוירה אחידה?

$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow f$ חסמה $\Leftrightarrow f_n$ חסמה הנוירה אחידה! 

משפט Dini: $R \rightarrow [a, b]$ רציפה, $f_n \rightarrow f$ (נקודתית). אזי אם:

1) $f_n(x)$ מונוטונית יורדת כל x $\Leftrightarrow f_n \xrightarrow{u} f$ הנ"ל

2) f רציפה

הוכחה (הוכחה זריזת את):

הערה של בינה-קורט: אם כימי פתח של הקטע $[a, b]$ קיים תת-כימי. כופ.

כימי פתוח = $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} U_\alpha$ אולי כשהוא יש ק' פתיחות כך יש. $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} U_\alpha$

הוכחה (הוכחה):

(סקיצה) נשתמש בארה המדבר. ניח שלא קיים תת כימי.

כופ $\Leftarrow$ נפתח באחד החזאי לא קיים תת כימי כופ. נקח סדרה של קטעים $[a_n, b_n]$

$b_n - a_n = \text{length}([a_n, b_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (כופ) $[a, b] = [a_n, b_n]$ שלא קיים זה תת כימי כופ. נשים זק ו-.

נשתמש במעמד של קטור ונקב שהימת ויחידה $[a_n, b_n]$ $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

מכיון יש $\{U_\alpha\}$ זה כימי $\Leftarrow [a, b]$ קיימת ק' ק $x_0 \in U_\alpha$.

תבנית חדו"א 10

למשך הוכחת המשפט.

מכיוון שזה כיסוי פתוח: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U_{\alpha_0}$ כדלז.

נשים לב $x_0 \in [a_n, b_n]$ אז $\exists$ $N > 1$ כזה שכל $n > N$ (קרי) $[a_n, b_n] \subset U_{\alpha_0}$.

כלומר $[a_n, b_n] \subset U_{\alpha_0}$ (כי $b_n - a_n \rightarrow 0$). אז סתירה!

הוכחת צ'יני

מהנתון נובע שיש $x \in I$ ויש $N \in \mathbb{N}$ כזה שכל $n > N$ $f_n(x) \leq f(x)$ ולכן מספיק להוכיח

שכל $x \in I$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שכל $n > N$ ויש $x \in I$: $f(x) - \epsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \epsilon$ (הי' $\epsilon > 0$).
מכיוון ש- $f_n \rightarrow f$ (נקודתית), אז $N \in \mathbb{N}$ קיים $N > N$ כך ש- $f_n(x) > f(x) - \epsilon$ (תנאי שחסר).

$$f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

$$(\forall x \in [a, b]) \exists N(x) \quad \forall n > N(x) \quad f_n(x) < f(x) + \epsilon \quad (\text{השקפה})$$

מכיוון ש- $f_n \rightarrow f$ וצ'יני $\Leftarrow$ קיימת סביבה של x ק שבה $y \in (x - \delta, x + \delta)$ ויש

$$f_n(y) < f(y) + \epsilon \quad \text{יתקיים:}$$

הקטגוריות $(x - \delta, x + \delta)$ מהוות כיסוי פתוח של $[a, b]$. מהינה

סדרת הקיים תת-כיסוי סופי ז"ל קיימות נק' $x_1, \dots, x_N, \dots, x_N$.

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^N (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \quad \text{כך ש-}$$

נשים לב שמתקיים $0 \leq f_n(y) - f(y) \leq f_n(y) - f(y) < \epsilon$ (כי הפס' מיל' ורמת) $\forall y \in (x - \delta, x + \delta)$ וכל $n > N$.

$$N_0 = \max\{N_1, \dots, N_N\}$$

$\Leftarrow$ אז $y \in [a, b]$ וכל $n > N_0$ מתקיים: $f_n(y) < f(y) + \epsilon$