

חדול II - שיעור 9

מצב דיריכלי

משפט אבס: תהייה $f, g: [a, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$\int_a^\omega fg < \infty$$

f מונטונה, g נכיתה קרית (1) וחטמה $\int_a^\omega g(x) dx < \infty$ (2) ו- $\int_a^\omega fg < \infty$ (3)

משפט דיריכלי: $f, g: [a, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$\int_a^\omega fg < \infty$$

f מונטונה, $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0$ (1) ו- g נכיתה קרית $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ חטמה (2) ו- $\int_a^\omega fg < \infty$ (3)

הוכחת אבס:

נשים δ שט הפנ' אינ' בט תת קטע סגור $[b_1, b_2]$ וקטע מרחקו δ .

$$\exists M \quad |f(x)| \leq M \quad \Leftarrow (1)$$

$$\exists B \quad \forall b_1, b_2 \in [B, \omega] \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} g(t) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad \Leftarrow (2) \text{ משפט II}$$

$$\exists x_0 \in [b_1, b_2] \text{ s.t. } \left| \int_{b_1}^{b_2} fg \right| \leq |f(x_0)| \left| \int_{b_1}^{x_0} g(t) dt \right| + |f(b_2)| \left| \int_{x_0}^{b_2} g(t) dt \right| \quad (3) + (4) + (5)$$

$$\leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\Leftarrow$ מתיסריו קושי מתקם.

הוכחת דיריכלי:

שום δ הפנ' אינ' בט תת קטע סגור (נקט מרחקים) כעת מרחקות:

$$\frac{1}{2M} \geq |G(y) + G(x)| \geq |G(y) - G(x)| = \left| \int_x^y g(t) dt \right| \quad \Leftarrow (2)$$

$$\exists x_0 \in [b_1, b_2] \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} fg \right| \leq |f(x_0)| \left| \int_{b_1}^{x_0} g(t) dt \right| + |f(b_2)| \left| \int_{x_0}^{b_2} g(t) dt \right| \leq 2M [|f(x_0)| + |f(b_2)|]$$

$$\forall x \in B \quad |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M} \quad \text{נבחר } B \in [a, \omega] \text{ כך ש-}$$

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} fg \right| \leq 2M \left[\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{4M} \right] = \epsilon \quad \Leftarrow \quad \forall b_1, b_2 \in [B, \omega]$$

ב'מ' קיבול שמתקיים קריטריון קושי סגור $\int_a^\omega fg$

נוסחת סטירלינג:

מטרה: להעריך את העיטוי $n!$.

① נשתמש בערכה של $\ln x$ כדי נקבע: $\int_{j-1}^j \ln x dx \leq \ln(j) \leq \int_j^{j+1} \ln x dx$

כעת נסכס: $\sum_{j=1}^n \ln(j) = \ln(n!)$ ונקבע: $\int_1^n \ln x dx \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln x dx$

נעשה אינטגרציה בחלקים: $\int_1^{n+1} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{n+1}$

$= (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1) \ln(n+1) - n$

$\int_1^n \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^n = n \ln n - n + 1$

כעת נעשה $e^{n \ln n - n + 1} \leq n! \leq e^{(n+1) \ln(n+1) - n}$

$e^{n \ln n - n + 1} \leq n! \leq e^{(n+1) \ln(n+1) - n}$

$n^n \cdot e^{-n} \cdot e \leq n! \leq (n+1)^{n+1} \cdot e^{-n}$

תוצאה: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ (העקוב של המנה בין העיטויים כאשר $n \rightarrow \infty$)

$\sqrt{2\pi} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$

נוסחת סטירלינג:

הוכחה: (העשרה - מקשים (עמ' 45-46)

סדרות וטורים שאינן פונקציות

דוגמאות:

① $f_n(x) = x^n$ $[0, 1]$

② $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}$ $[0, 2\pi]$

③ $f_n(x) = P_n(x)$ $[a, b]$ - פולינום סטירלינג של פונקציה נתונה בביק $x=0$ מכבר n .

④ $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $[0, 1]$

שאלות: ② התכנסות (התכנסות נקודתית): הנתון סדרת פונקציות $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($f: I \rightarrow \mathbb{R}$)

כאשר $f_n \rightarrow f$ אם $x \in I$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$



$f_n' \rightarrow f'$

- (I) f_n וצפופה f וציפה f האם?
- (II) f_n אינן f אינן f האם?
- (III) f_n צפופה f וציפה f האם?
- (IV) f_n f f האם?

הכנה מדויק 9

נסתכל על הפונקציות:

$$f_n \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases} \quad \text{מתחילי} \quad \text{נראה} \quad f_n(x) = x^n \quad (1)$$

פונקציה נצט"ס (I) - נראה: $f_n(x)$ ו- f אינם זהים!

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ונצט"ס:} \quad (II) \quad \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset [0,1]$$

$$f_n(x) \rightarrow D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{היא פונקציה}$$

וקיבלנו פונקציה נצט"ס (III) - נראה: f_n אינן אף $D(x)$!

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad [0, 2\pi] \quad f(x) = 0 \quad \leftarrow f'_n(x)$$

נראה: $f'_n(x) = \cos(nx)$. נראה: $f'_n(x)$ אינן קיימות!

אין בהכרח קשר בין $\lim f'_n$ ובין f' (נראה נצט"ס (III)!)!

$$[0,1] \quad f_n(x) = n x (1-x^2)^n \quad (4)$$

נראה: $f_n(x) \rightarrow f \equiv 0$ (נראה: $0 < q < 1$ $nq^n \rightarrow 0$)

$$\int_0^1 f_n dx = \int_0^1 n x (1-x^2)^n dx \quad \text{נראה:} \quad y = 1-x^2 \quad dy = -2x dx$$

$$= \int_1^0 n y^n \cdot \frac{dy}{-2} = \frac{n}{2} \int_0^1 y^n dy = \frac{n}{2} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

למרות שהפונקציה f_n היא לא מתכנסת!

הסקרה: מושג ההתכנסות שהצגנו לא מספיק חזק!

התכנסות אחידה שווה:

נראה: מונח $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ מתכנסת אחידה שווה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ אם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (1)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (2)$$

התכנסות אחידה $\leftarrow$ התכנסות נקודתית אבל לא זהה!
(נסתכל שוב על הפונקציות)

$$f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0 \quad \text{נראה: } f_n \text{ מתכנסת } f \text{ אחידה?}$$

נראה: $f_n(x) = x^n$ אינן מתכנסות אחידה! $\forall \epsilon = \frac{1}{2} \forall N \exists x_n (n > N) \text{ s.t. } |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$
(נראה: $x_n = \sqrt[n]{n}$)

$$f_n \rightarrow f \equiv 0 \quad \text{התכנסות נקודתית} \quad [0, 1] \quad f_n(x) = x^n - x^{2n} \quad (*)$$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0 \quad \text{אם } f_n \not\rightarrow f \equiv 0 \quad \text{המייצג שונה}$$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0$$

$$\frac{1}{n}a = x^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = x_n$$

בבדיקת נקודתית, נקודתית

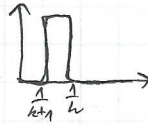
$$\Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

↓

עבור $\frac{1}{4} < \varepsilon$ לא משנה כמה אנחנו תמיד

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{4} > \varepsilon \quad \text{אם } n \text{ קטן}$$

ואם בבדיקת שטח, התכנסות במ"ש.



$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (*)$$

$$f_n \rightarrow f \equiv 0 \quad \text{התכנסות נקודתית} \quad \text{אם } f_n \text{ במייצג שונה}$$

הכיוון השני להתכנסות במ"ש: $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ מתכנסת במ"ש

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall m, n > N_\varepsilon \forall x \in I. |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{אם } n \text{ ו } m \text{ קטנים}$$

(הוכחה)

$$\Leftarrow \text{נניח ש } f_n \text{ מתכנסת במ"ש } f_n \xrightarrow{m,n} f \quad \text{יהי } \varepsilon < 0. \text{ נבחר } N \in \mathbb{N}$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad x \in I \quad \text{כך ש } m, n > N$$

$$\checkmark \quad \forall m, n > N \quad \forall x \in I. |f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \text{נניח שמתקיים ההכרחי.}$$

$$\text{יהי } \varepsilon < 0. \text{ נבחר } N_\varepsilon \text{ כך ש } \forall m, n > N_\varepsilon \quad \forall x \in I \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(x) \leq f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{היא מתכנסת} \quad \text{אם } \{f_n(x)\} \text{ סדרת קושי. כל } x \in I$$

$$\Leftarrow \text{ק"מ } N_2 \text{ כך ש } m, n > N_2: f_m(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + \varepsilon \quad f_m(x) - \varepsilon \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\square \quad \text{וקיבנו } N = \max\{N_\varepsilon, N_2\} \text{ את ההכרחי להתכנסות במ"ש!}$$