חדו"א 2ב תרגול 8

אינטגרלים לא אמיתיים

נ"ח $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ כאשר $\omega=\pm\infty$ או $\omega\in\mathbb{R}$. נניח שלכל $b<\omega$ הפונ' f אינט' ב- $[a,b]$. האינטגרל הלא אמיתי: $\int_a^\omega f=\lim \int_a^b f$

קריטריון קושי להתכנסות אינטגרלים: האינטגרל מתכנס $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{b_1\to\omega^- \\ b_2\to\omega^-}}\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right|=0$

אינטגרל לא אמיתי של פונ' אי שלילית:

נ"ח $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ פונ' אי שלילית, ואינט' על כל תת הקטע $[a,b]\subset[a,\omega)$

טענה: נסמן $F(b)=\int_a^b f$. האינטגרל מתכנס $\Leftrightarrow$ F חסומה.

הוכחה:

הפונ' F לא יורדת, ולכן קיים הגבול $\lim\limits_{b\to\omega^-}F(b)$ $\Leftarrow$ הפונ' חסומה ■

$\int_a^\omega f=\lim\limits_{b\to\omega^-}F(b)$.

דוגמא: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ב- $(0,1]$. הפונקציה $F(t)=\int_t^1\frac{1}{x^2}$ לא חסומה $F(t)=\frac{1}{t}-1$

ולכן האינטגרל מתבדר.

מבחן ההשוואה: נ"ח $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינט' בכל תת קטע סופי עם $0\le f\le g$.

אם $\int_a^\omega g$ מתכנס אז גם $\int_a^\omega f$ מתכנס.

הוכחה:

$F(b)=\int_a^b f$, $G(b)=\int_a^b g$. נתון ש- $\int_a^\omega g$ מתכנס, לכן G חסומה. מכיוון ש- $0\le F\le G$

גם F חסומה ו- $\int_a^\omega f$ מתכנס. ■

דוגמאות: * $\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}<\infty \Leftrightarrow \alpha>1$ * $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}<\infty\Leftrightarrow\alpha<1$

(1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ב- $[1,\infty)$. נשים לב $1+x^2\le 2x^2$ ב- $[1,\infty)$ ולכן $f(x)\ge\frac{1}{\sqrt{2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x}$

$\Leftarrow$ f מתבדר!

(2) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב- $[0,\infty)$. מתכנס, כי $e^{-\frac{x^2}{2}}\le e^{-(x-1)}$

אקספוננציאלי, הוכחנו מתכנס!

⚠ **הערה:** כמו בטורים, מספיק להראות ש- $f\le g$ החל ממקום מסוים, מספיק להראות ש- $f\le C\cdot g$

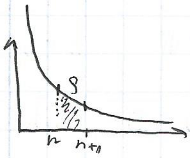
כאשר C קבוע.

(אי שלילית)

משפט: נניח $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה חיובית ויורדת. נניח שאינטגרבילית

על כל תת קטע סופי. אזי: $\int_1^\infty f$ מתכנס $\iff \sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty$

בנוסף, $\sum_{n=2}^\infty f(n) \le \int_1^\infty f \le \sum_{n=1}^\infty f(n)$



<u>הוכחה:</u> מכיוון ש-f יורדת: $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f \le f(n)$

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \le \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f \le \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

$$\Downarrow (*)$$

כלומר: $\sum_{n=2}^\infty f(n) \le \int_1^\infty f \le \sum_{n=1}^\infty f(n)$

הסבר למעבר: $(*)\quad \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f \underset{\text{ליניאריות האינטגרל}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} f$

⚠ מותר לנו לעבור רק על הסכומים (התכנסות של האינטגרל) רק בגלל שהפונ' אי שלילית

ולכן פונ' האינטגרל עולה! לכן אם מצאנו שהיא חסומה $\Leftarrow$ גם הסדרה חסומה.

⚠ הסדרה $a_N=\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right)-\int_1^{N+1} f$ היא סדרה עולה, חסומה מלמעלה ע"י $f(1)$

<u>הסבר:</u> $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f \le f(n) \Rightarrow a_{N+1}-a_N=f(N+1)-\int_{N+1}^{N+2} f \ge 0$

לכן a_n עולה. למה חסומה ע"י $f(1)$? נרצה להראות ש-:

$$a_N=\sum_{n=1}^N f(n)-\int_1^{N+1} f \overset{?}{\le} f(1) \iff \sum_{n=2}^N f(n)-\int_1^{N+1} f < 0$$

וכן: $f(2)\le\int_1^2 f$, $f(3)\le\int_2^3 f$, ..., $f(n)\le\int_{n-1}^n f$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^N f \le \int_1^N f \le \int_1^{N+1} f$ ∎

מסקנה: תחת הנחות המשפט, קיים וסופי הגבול הבא: $\lim_{N\to\infty}\left[\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right)-\int_1^{N+1} f\right]$

⚠ <u>תרגול</u> - גם אם f עולה הטענה נכונה!

<u>דוגמא:</u> ~~[illegible]~~

① ניקח את $f(x)=\frac{1}{x}$ ב-$[1,\infty)$. נקבל שקיים הגבול-

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}-\underbrace{\int_1^{N+1}\frac{dx}{x}}_{\ln(N+1)}$$

<u>מסמנים:</u> $\gamma=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}-\overbrace{\ln(N+1)}^{\ln N}\right]=0.577$ $\leftarrow$ קבוע אוילר

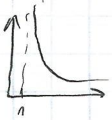
<u>דוגמאות להשוואה עם טורים:</u>

② $f(x)=\frac{1}{x^s}$ ב-$[1,\infty)$ עבור $s>0$. האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}<\infty \iff \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}<\infty$

מתכנס אמ"מ $s>1$.

המשך חדו"א 8

③ עבור $s>1$ נתון $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ פונק' זטא של רימן



מה קורה ל- $\zeta(s)$ כאשר $s\to1^+$?

נראה שעבור $s\sim1$ $\zeta(s)\sim\frac{1}{s-1}$.

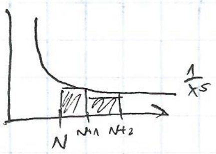
באופן פורמלי נוכיח ש- $\lim_{s\to1^+}(s-1)\zeta(s)=1$

חישוב:
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}\le\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\le1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{s-1}\le\zeta(s)\le1+\frac{1}{s-1}$$
$$\Downarrow$$
$$1\le(s-1)\zeta(s)\le1+(s-1)\xrightarrow{s\to1^+}1$$
$\Leftarrow$ מתקבל ✓

הבנה מדויקת יותר של ζ ע"י $s=1$:

④
$$\underline{\lim_{s\to1^+}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right]=\gamma}$$ קבוע אוילר

הסבר: נקבע N.
$$\zeta(s)=\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}}_{\text{סכום סופי}}+\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}_{\text{נחסם ע"י אינטגרל}}$$



$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\int_{N+1}^{\infty}\frac{dx}{x^s}\le\zeta(s)\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\int_{N}^{\infty}\frac{dx}{x^s}$$
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{(N+1)^{1-s}}{s-1}\le\zeta(s)\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}\quad\Big/-\frac{1}{s-1}$$
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{(N+1)^{1-s}-1}{s-1}\le\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}-1}{s-1}\quad\circledast$$

כאשר $s\to1^+$:
* $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\xrightarrow{s\to1^+}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

$\left(f'(0)=\lim_{s-1\to0}\frac{f(s-1)-f(0)}{s-1-0}\right)$

* $\lim_{s\to1^+}\frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{s-1}-1}{s-1}=f'(0)$, $f(x)=\frac{1}{N^x}$, $f'(x)=\frac{1}{N^x}\ln\left(\frac{1}{N}\right)$
$$\Downarrow$$
$$f'(0)=\ln\left(\frac{1}{N}\right)$$

לכן אם נותחים ב- $\circledast$ גבול כאשר $s\to1^+$, אגף שמאל:
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{(N+1)^{s-1}}{s-1}\longrightarrow\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1)$$
אגף ימין:
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{s-1}-1}{s-1}\longrightarrow\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N)$$

אז מסקנה הכרחית:
$$\circledast\ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1)\le\varliminf_{s\to1^+}[\cdot]\le\varlimsup_{s\to1^+}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right]\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N)$$

היות שלכל N קבוע מתקיים $\circledast$

ניקח את הגבול $N\to\infty$ ונקבל
$$\gamma\le\varliminf\le\varlimsup\le\gamma$$
$$\Downarrow$$
$$\lim=\gamma\quad\blacksquare$$

אינטגרלים לא אמיתיים של פונקציות משנות סימן:

הגדרה: התכנסות בתנאי: האינטגרל $\int_a^\omega f$ מתכנס אבל $\int_a^\omega |f| = +\infty$

מבחינת אלו אינטגרלים שמופיעים $\sin|\cos$. נטפל בעזרת:

← שיטה ישירה (אינט' בחלקים | החלפת משתנה)

← קריטריון אבל ודיריכלה.

דוגמאות:

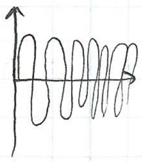
① $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ב- $[\frac{\pi}{2},\infty)$:

$$\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}dx \overset{\substack{u=-\cos x\\ v=\frac{1}{x}}}{=} \cancel{-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi/2}^\infty} - \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx = -\int_{\pi/2}^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx$$

מתכנס, אפילו בהחלט! (מ"ה השוואה)

⚠ אינטגרציה בחלקים משפרת התכנסות לפעמים

② $f(x)=\sin(x^3)$ ב- $[1,\infty)$



$$\int_1^\infty \sin(x^3)dx = \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2/3}}dt = \frac{1}{3}\cdot -\frac{\cos t}{t^{2/3}}\Big|_1^\infty - \frac{2}{9}\int_1^\infty\frac{\cos t}{t^{5/3}}dx \in\mathbb{R}$$

$t=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$, $dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^{2/3}}$; $u'=-\cos t$, $v=\frac{1}{t^{2/3}}$

ממש סופי ; מתכנס בהחלט

קריטריון אבל/דיריכלה:

הרעיון: נרשום את האינטגרל כ- $\int_1^\infty fg$ כאשר f החלק התנודתי, ו-g חיובי/מונוטוני.

נניח $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינט' בכל תת הקטע סופי, ו-g מונוטונית וגזירה ברציפות.

אבל: g חסומה, $\int_a^\omega f$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

דיריכלה: $F(b)=\int_a^b f$ חסומה, $\lim_{x\to\omega^-} g(x)=0$ $\Leftarrow$ $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

דוגמאות:

① נניח g פונ' מונוטונית שואפת ל-0 ב-∞. אזי $\int_1^\infty g(x)\sin x\,dx$ מתכנס. אפילו $\int_2^\infty\frac{\sin x}{\ln x}$ מתכנס.

זה מדיריכלה $F(b)=\int_a^\omega \sin t\,dt$ חסומה - $|F(b)|=|\cos b-\cos a|\le 2$.

② נניח ש- $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס. אזי משאבל גם $\int_1^\infty \arctan(x)f(x)dx$ מתכנס.

שאלה: האם תיתכן פונקציה לא חסומה $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ עם אינטגרל מתכנס? כן!