חדוא שיעור 7

אינטגרל "לא אמיתי"

הגדרה: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $a<b<\infty$, $f|_{[a,b)}\in R[a,b]$, ונניח גם שקיים הגבול $I=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt$. במקרה כזה נאמר ש-$f$ אינטגרבילית ב-$[a,\infty)$

ומתקיים $\int_a^\infty f(t)dt=I$ (מותר גם I אינסופי, אם I סופי נאמר שהאינטגרל מתכנס)

בדומה מגדירים עבור $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ - $\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(t)dt=\int_{-\infty}^a f(t)dt$

אם הגבול קיים וכן הכל מוגדר, $\forall c:\ f\in R[c,a]$

דוגמאות

* $\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}[-e^{-x}|_0^b]=\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b})=1$ ✓

* $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \alpha>1\ ✓\\ +\infty & \alpha<1\end{cases}$

$\alpha=1:\quad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}(\ln x|_1^b)=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$

הגדרה: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח $f\in R[a,b]$ לכל $a<b\in\mathbb{R}$. נגדיר, אם שני האינטגרלים $\int_0^\infty f(x)dx,\ \int_{-\infty}^0 f(x)dx$ קיימים וסופיים אז: $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^\infty f(x)dx$

למעשה, מוגדר גם אם שניהם $+\infty$, שניהם $-\infty$ או אחד סופי והשני $\pm\infty$ באופן הטבעי.

באופן שקול הנ"ל מוגדר להיות הגבול הבא, אם הוא קיים:

$$\lim_{M\to-\infty}\int_M^0 f(t)dt+\lim_{N\to\infty}\int_0^N f(t)dt=\lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to\infty}}\int_M^N f(t)dt$$

⚠ זה לא שקול לגבול $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N f(t)dt$ - שעבור פונקציה אי זוגית תמיד מתכנס ל-0.

המשך דוגמאות

* $\nexists\ \int_0^\infty \sin x\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x\,dx=\lim_{b\to\infty}[-\cos x]_0^b=\lim_{b\to\infty}[1-\cos b]=\nexists$

* $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}}\int_{-M}^N\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}}\operatorname{atan}|_{-M}^N=\lim_{x\to\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x=$

התפלגות קושי

$=\pi/2-(-\pi/2)=\pi$

הגדרה: תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $a<c<b$ $f\in R[c,b]$.

(⚠ אם f קודם חסומה לא משנה איך נגדיר אותה ב-a (הם אינטגרביליות) $\int_a^b f(t)dt$ שהוגדר)

אבל אם הגבול הנ"ל קיים $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(t)dt$, נגדיר אותו להיות $\int_a^b f(t)dt$.

אם הוא סופי נאמר שהאינטגרל מתכנס.

⚠ באופן דומה נפסקאות ל- $f:[a,b)\to\mathbb{R}$: $\int_a^b f(t)dt := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(t)dt$ ($\forall c: f\in R[a,c]$)

ו- $f:[a,b]\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ $\int_a^b f(t)dt := \int_a^{x_0^-} f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt$

בהנחה ש-332 ימין מוגדר ולא חיברנו $+\infty$ ו- $-\infty$.

דוגמאות:

כאשר $\alpha\neq 1$

$$\circledast\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon} = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & \alpha<1\\ \infty & \alpha>1\end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln\varepsilon = \infty$$

(ניוטון לייבניץ לאינטגרל לא אמיתי: $f,F:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ (כאשר $\omega=+\infty$ או $\omega=c\in\mathbb{R}$)

ונניח שלכל $b<\omega$ $f\in R[a,b]$, ונניח גם שלכל $a<x<\omega$, $f(x)=F'(x)$ אזי:

$\int_a^\omega f(t)dt = \lim_{b\to\omega} F(b)-F(a)$ (בהנחה ש-332 ימין מוגדר) הוכחה: הגדרה + N.L

לינאריות 1: $\int_a^\omega \alpha f+\beta g = \alpha\int_a^\omega f + \beta\int_a^\omega g$ בהנחה ש: $\forall b<\omega\ f,g\in R[a,b]$

331 ימין קיים, והחיבור מוגדר (לא $+\infty, -\infty$ או להפך). הוכחה: הגדרה + חדו״א

לינאריות 2: $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח $\forall b<\omega\ f\in R[a,b]$ אזי

לכל $a<b_0<\omega$ $\int_a^\omega f(t)dt = \int_a^{b_0} f(t)dt + \int_{b_0}^\omega f(t)dt$

מונוטוניות: נניח $f\le g$, $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$, $f,g\in R[a,b]$ $\forall a<b<\omega$, אזי אם

האינטגרלים קיימים מתקיים $\int_a^\omega f \le \int_a^\omega g$ הוכחה: הגדרה + גבול מכבד אי שוויון חלש + משפט מתאים

אינטגרל בחלקים: $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ גזירות ונניח $f',g'\in R[a,b]$ $\forall a<b<\omega$

אזי: $\int_a^\omega f'g = \lim_{b\to\omega} f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^\omega fg'$ בהנחה ש- $\int_a^\omega fg'$ מוגדר,

הדבות $\lim_{b\to\omega} fg$ קיים, והחיבור ביניהם מוגדר הסק.

שינוי משתנה: $f:[c,\eta)\to\mathbb{R}$ ו- η סופי/אינסופי) ונניח שלכל $c<b<\eta$: $f\in R[c,d]$.

תהי $\varphi:[a,\omega)\to[c,\eta)$ גזירה ברציפות ועולה. ונניח: $\varphi(a)=c$ וכן $\lim_{b\to\omega^-}\varphi(b)=\eta$

אזי $\int_a^\omega f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_c^\eta f(t)dt$

עיקר ההוכחה: $\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \lim_{b\to\omega}\int_{c=\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$

⚠ שמה עולה כדי שהגבולות לה יהיה אמ״מ ולא נידרש לדרישות שזה מתקיים והשני לו.

המשך חדו'ח 7

קריטריונים להתכנסות אינט' לא אמיתי

משפט - הקריטריון קושי להתכנסות של אינטגרל לא אמיתי - (לא מספר סופי!)

תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$, ונניח שלכל $a<b<\omega$ $f\in R[a,b]$. אזי $\int_a^\omega f$ קיים וסופי

אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $a<B<\omega$ כך שלכל $B<b_1<b_2<\omega$ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$

קריטריון קושי לפונקציות: תהי $F:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אזי קיים $\lim_{x\to\omega^-}F(x)$ אם ורק אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $B<\omega$ (אם ω סופי, נסמן $B=\omega-\delta$) כך שלכל $B<x_1,x_2<\omega$: $|F(x_1)-F(x_2)|<\varepsilon$

הוכחה (רעיון): קיום גבול $\Leftrightarrow$ קיים גבול לפי כל סדרה $\to \omega$

$\Leftrightarrow$ מתקיים קושי לסדרות

נוכיח במעבר תנאות קריטריון קושי לאינטגרלים: נסמן $F(b)=\int_a^b f(t)dt$

צ"ל: קיים הגבול $\lim_{b\to\omega}F(b)$ וסופי $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $a<B<\omega$ כך שלכל

$B<b_1<b_2<\omega$ אז $|F(b_2)-F(b_1)|<\varepsilon$ $\rightarrow$ השקילות הנ"ל היא בדיוק קושי לפונקציות ■

הגדרה: תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $a<b<\omega$ $f\in R[a,b]$. נאמר ש־$\int_a^\omega f$ מתכנס

בהחלט אם $\int_a^\omega |f|$ מתכנס.

כשאינטגרל לא אמיתי מתכנס ולא בהחלט אומרים שהוא מתכנס **בתנאי**.

טענה: תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $a<b<\omega$ $f\in R[a,b]$, ונניח ש־$\int_a^\omega f$

מתכנס בהחלט, אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

הוכחה: נתון $\int_a^\omega |f|$ קיים וסופי. לכן לפי קושי לכל $\varepsilon>0$ קיימת $a<B<\omega$

כך שלכל $B<b_1,b_2<\omega$: $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| \underset{\text{הוכחנו}}{\le} \int_{b_1}^{b_2}|f|<\varepsilon$ צ"ל גם f מקיימת קריט' קושי להתכנסות

$\int_a^\omega f$ ■