חדו"א II - 6

<u>תזכורת</u>: <u>המשפט היסודי של החדו"א</u>: $f\in R[a,b]$ ו- f רציפה ב-$x\in[a,b]$

אזי $F(x)=\int f(t)dt$, גזירה ב-x ומתקיים $F'(x_0)=f(x_0)$

<u>משפט NL</u>: $f\in R[a,b]$ ו-F קדומה של f אזי $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

<u>נוסחת השארית האינטגרלית בטור טיילור</u>: נתון $f\in C^{(n+1)}[a,b]$ גזירה ברציפות $n+1$ פעמים:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה (+ אינטגרציה בחלקים + משפטים יסודיים)

$n=0$: $f(x)\overset{?}{=}f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ (כן לפי NL ✓)

נניח שהטענה נכון עבור n ונבדוק עבור $n+1$:

$$R_{n+1}(x,a)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$R_{n+1}(x,a)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt-\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\left[\frac{-\frac{d}{dt}(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]dt-\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=$$

$$=\cancel{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]\Big|_a^x}-\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+2)}(t)\left(\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)dt-\cancel{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}}(x-a)!=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt \quad ■$$

<u>שינוי משתנה באינטגרל</u>: $f\in R[a,b]$ רציפה $^{(*)}$ ונניח שקיימת $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$

$(\varphi(\alpha)=a\ ;\ \varphi(\beta)=b)$, φ גזירה ברציפות $^{(**)}$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

⚠ בדרך כלל φ מונוטונית ממש (חח"ע)

<u>הוכחה</u>: נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. f רציפה $\overset{\text{משפט יסודי}}{\Leftarrow}$ F קדומה של f בקטע $[a,b]$.

נגדיר $G(y)=F(\varphi(y))$ (אפשר לגזור מההרכבות) ונקבל לפי כלל השרשרת:

$G'(y)=F'(\varphi(y))\varphi'(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)$. (נבצע אינטגרל משני ~~הצדדים~~ האגפים:

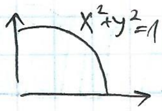
$$F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=G(\beta)-G(\alpha)\overset{NL}{=}\int_\alpha^\beta G'(y)dy=\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\varphi'(y)dy$$

$$\| $$

$$F(b)-F(a)\overset{NL}{=}\int_a^b f(x)dx$$

כלומר קיבלנו $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\varphi'(y)dy$ כנדרש! ■

דוגמא: $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$



נבחר $\varphi(t)=\sin t$ גזירה ברציפות $\varphi[0,\pi/2]\to[0,1]$

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2t}\,\cos t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt \xrightarrow{\text{דרך א'}} \cos^2t=\frac{1+\cos(2t)}{2}$$

דרך ב'- תכונה: $\int_0^{\pi/2}\sin^2 dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 dX$ (בשינוי משתנה - $x=\pi/2-t$)

ואז קיבלנו $2\int_0^{\pi/2}\cos^2x\,dx=\int_0^{\pi/2}(\overbrace{\sin^2x+\cos^2x}^{1})=\pi/2$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2x\,dx=\underline{\underline{\pi/4}}$$ ■

סוג של הסבר לקשר בין הסימנים: dx,dt

$$\int_a^b f(x)dx\overset{\text{במקום}}{\Rightarrow}\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i)\Delta x_i$$

שינוי משתנה $x\to\varphi(t)$

$dx\to\varphi'(t)dt$

נקודות החלוקה $x_i=\varphi(t_i)$, והנקודות המתאימות $\tilde{x}_i=\varphi(\tilde{t}_i)$

$$\Leftarrow\quad \int_a^b f(x)dx\leftarrow\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tilde{t}_i))[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]=$$

משפט לגרנז' $=\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tilde{t}_i))[\varphi'(\tilde{\tilde{t}}_i)]\Delta t_i$

נוסחאת Wallis סטירלינג

(שימושית להוכחת נוסחאות ← סטירלינג שימושית)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n-1)}=\frac{\pi}{2}}$$

נוסחת סטירלינג: $\boxed{n!\cong(\frac{n}{e})^n}$

הוכחת נוסחת Wallis

שלב א': הגדרה: לכל $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m(x)dx=\int_0^{\pi/2}\underbrace{\frac{d}{dx}(-\cos(x))}_{\square'}\underbrace{\sin^{m-1}(x)}_{\triangle}dx\overset{\text{אינטגרל בחלקים}}{=}$$

$$=\cancel{-\cos x\sin^{m-1}x\Big|_0^{\pi/2}}-\int_0^{\pi/2}-\cos x(m-1)\sin^{m-2}(x)\cos(x)dx=$$

0 בנקודות הגבול

$$=(m-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2)\sin^{m-2}(x)dx=(m-1)(I_{m-2}-I_m)$$

קיבלנו $I_m=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m$

$$I_m=\left(\frac{m-1}{m}\right)I_{m-2}$$

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\sin^0(x)dx=\pi/2\quad;\quad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx=1$$

!!= קפיצות של 2

כעת אם $m=2n$ נקבל: $\searrow\ I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}=\frac{m-1}{m}\frac{m-3}{m-2}I_{m-4}=\ldots\frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}$

אם $m=2n+1$ אז נקבל: $I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}=\ldots=\frac{(m-1)!!}{m!!}1$

שלב ב': (סדרה מונוטונית יורדת $\sin^k x$ ב-k)

$$0\le x\le\pi/2\Rightarrow\sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n-1}x$$

מונוטוניות האינטגרל $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx\le\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\le\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx$

משמאל מקבלים: $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$

המשך חדו"א II - 6 [3]

<u>המשך הוכחת Wallis</u>: נחנק במקדם של $(\frac{\pi}{2})$ האמצעי:

$$\underbrace{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}}_{a_n} \le \frac{\pi}{2} \le \underbrace{\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}}_{b_n} \quad (*)$$

טענה: הסדרות $a_n, b_n \to \pi/2$. הסבר:

$$b_n - a_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{(2n)(2n+1)} \underset{\text{לפי }(*)}{\le} \frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

היות ו $|b_n - a_n| \to 0$ ומריווין ש $\frac{\pi}{2}$ תמיד נמצא באמצע

מתקיים: $|b_n - \frac{\pi}{2}| \to 0$ וגם $|a_n - \frac{\pi}{2}| \to 0$

<u>שים לב</u>: נשים לב שהסדרה $b_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi/2$ היא בדיוק נוסחת Wallis!

<u>טענה (דעיכת מקדמי פורייה בהינתן גזירות)</u>

תהי $f\in C^1([0,2\pi])$ ונסמן $M=\sup_{[0,2\pi]}|f'|$ אזי $\forall n\in\mathbb{N}$: $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\right| \le M\frac{2\pi}{n}$

<u>הוכחה: אינטגרציה בחלקים</u>:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\right| = \left|\cancel{f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{2\pi}} - \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right| \underset{\substack{\text{(מונ' הטריגו)}\\ \text{+ } f' \text{ חסומה}}}{\le} \frac{M}{n}2\pi$$