חדו"א שיעור 5

<u>תזכורות:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in R([a,b])$, $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ $\quad a\le x\le b$

F רציפה. בהנחה ש-f רציפה ב-$[a,b]$ אזי:

אז $\min_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le \max_{[a,b]} f$

יותר מזה, אם $0\le g$ אזי: $\min f\cdot\int_a^b g \le \int_a^b f\cdot g \le \max f\cdot\int_a^b g$

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f\cdot g}{\int_a^b g}$$

משפט ע"ב אינטגרלי: $f(x_0)\cdot\int_a^b g = \int_a^b fg$

<u>משפט [הכללה של בונה Bonnet גרסה 1]</u>: תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$,

ונניח ש-f מונוטונית עולה (יורדת) וכן $0\le g\in R([a,b])$. אזי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש-:

$$\int_a^b f\cdot g = f(a)\cdot\int_a^{x_0} g(t)dt + f(b)\int_{x_0}^b g(t)dt$$

<u>הוכחה:</u> $f(a)\le f(x)\le f(b)$, $\forall x\in[a,b]$ (f מונו' עולה). משום ש $0\le g$ אז גם

$f(a)\cdot g(x) \le f(x)\cdot g(x)\le f(b)\cdot g(x)$ (אינטגרלים ומכפלות שומרת הסדרים)

ממשפט משיעור שעבר: $f(a)\int g \le \int fg \le \int g\cdot f(b)$

(הערנו בחדו"א 1 אם $x\le z\le y$ אזי $z=(1-\lambda)x+\lambda y$ $\quad \exists\, 0\le\lambda\le 1$)

צ"ל קיימת $0\le\lambda\le 1$ כך ש-

$$\int_a^b fg = \left[(1-\lambda)\int_a^b g(x)dx\right]f(a) + \left[\lambda\int_a^b g(x)dx\right]f(b)$$

כי שנשאר להראות זה שקיים $a\le x_0\le b$ כך ש-

$$(*)\quad \int_a^{x_0} g(t)dt = (1-\lambda)\int_a^b g(t)dt$$

$$(**)\quad \int_{x_0}^b g(t)dt = \lambda\int_a^b g(t)dt$$

נביט בפונ' $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ (שהיא רציפה החיובית).

$G(a)=0$, $G(b)=\int_a^b g(t)dt$

מתקיים: $G(a)=0\le(1-\lambda)\int_a^b g(t)dt\le G(b)$

ממע"ב לפונק' רציפות (חדו"א 1) מופעל על G קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש- $G(x_0)=c=(1-\lambda)\int_a^x g(t)dt$

נשים לב (מנ' אדיטיביות האינטגרל) $\int_{x_0}^b g(t)dt=\int_a^b g(t)dt-\int_a^{x_0} g(t)dt = \lambda\int_a^b g(t)dt.$

כנדרש! ■

המשפטים היסודיים של החדו"א

<u>משפט [המשפט היסודי של החדו"א]</u>: תהי $f\in R([a,b])$ ותהי $x_0\in[a,b]$ שבה f רציפה. אזי הפונ' $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ היא גזירה ב-x_0 ומתקיים $F'(x_0)=f(x_0)$.

(בפרט, אם f רציפה ב-$[a,b]$ נקבל ש-F קדומה של f).

משפט [משפט ניוטון לייבניץ]: תהי $f\in R[a,b]$ ונניח ש-F קדומה של f ב-$[a,b]$ (רצ' $F'=f$ $\forall x\in[a,b]$). אזי: $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$

(ובמעשה, לכל $x\in[a,b]$ מתקיים: $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt$).

הבדלים בין המשפטים: ⊛ לא לכל פונ' אינטגרבילית יש קדומה

⊛ ישנן פונ' לא רציפות שיש להן קדומה (דוגמה מדרבו)

⊛ במש' הראשון אפשר להשתמש על נק' x_0 בודדת

הוכחת המשפט היסודי:

$$F'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\overset{?}{=}f(x_0)$$

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=\frac1h\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt-f(x_0)=\frac1h\cdot\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt$$

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta>0$ כך שאם $|t-x_0|<\delta$ אזי $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$ (מרציפות f ב-x_0).

ואז לכל $|h|<\delta$ יתקיים:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac1h\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt\right|\le$$

$$\le\frac1h\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\underset{\text{אם } |h|<\delta}{\le}\frac1h\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon dt=\varepsilon$$

קיבלנו:

$$F'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)\quad\blacksquare$$

הוכחת משפט ניוטון לייבניץ: $f\in R([a,b])$

(מהיינה) נבחר סדרה של חלוקות $\Pi_j=\{a=x_0^{(j)}<\dots<x_{N_j}^{(j)}=b\}$ כך ש-$\lambda(\Pi_j)\xrightarrow{j\to\infty}0$

יתקיים $\underbrace{S(f,\Pi_j,\{t_i^{(j)}\}_{i=1}^{N_j})}_{\sum_{i=1}^{N_j}f(t_i^{(j)})\Delta x_i^{(j)}}\xrightarrow{j\to\infty}\int_a^b f$

נבחר סדרת חלוקות Π_j עם עדינות $\to 0$ כלשהי, את התג' המתאימות לחלוקה הזו (הנ"ת) נבחר כך: $\frac{F(x_i^{(j)})-F(x_{i-1}^{(j)})}{x_i^{(j)}-x_{i-1}^{(j)}}=F'(t_i^{(j)})$ $(=f(t_i^{(j)}))$

ע"י שימוש במשפט לגרנז' מחדו"א 1.

ועכשיו נחשב את סכומי רימן המתאימים:

$$S(f,\Pi_j,\{t_i^{(j)}\}_{i=1}^{N_j})=\sum_{i=1}^{N_j}\Delta x_i^{(j)}f(t_i^{(j)})=\sum_{i=1}^{N_j}\Delta x_i^{(j)}\cdot\frac{F(x_i^{(j)})-F(x_{i-1}^{(j)})}{\Delta x_i^{(j)}}\underset{\text{סכום טלסקופי}}{=}F(x_{N_j}^{(j)})-F(x_0^{(j)})=$$

$$\underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{מס' קבוע}}\xrightarrow{j\to\infty}\int_a^b f(t)dt$$

⇐ קיבלנו שסדרת סכומי רימן היא הסדרה הקבועה $F(b)-F(a)$

ולכן $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ כרצוי $\blacksquare$

המשך חדו"א 4 5

⚠ <u>הערה:</u> ראשית בשביל להשתמש בניוטון לייבניץ מספיק ש-F מקיימת

א) $F'=f$ ב-(a,b) ב) F רציפה ב-$[a,b]$

(המפרט ב-$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ לכל $\varepsilon>0$)

הסבר: (נוכל גם כך שההוכחה עובדת..):

$$\int_a^b f(t)dt \underset{\text{מרציפות האינטגרל } \int_a^x f(t)dt}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(t)dt \underset{N.L.}{=} F(b+\varepsilon)-F(a+\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to0}F(b)-F(a)$$

<u>למעשה</u> אם $f\in R[a,b]$ ו-F רציפה ומקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$ <u>למעט מס' סופי</u> של נקודות. עדיין השוויון הנ"ל מתקיים: $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

<u>הוכחה:</u>

נניח שהתנאים $F'=f$ מתקיימים בכל $[a,b]$ חוץ מאשר מנק' $c_0<c_1<\dots<c_n$ אזי $\int_a^b f=\int_a^{c_0} f+\dots+\int_{c_n}^b f$

בכל תת קטע $[c_i,c_{i+1}]$ מתקיימים התנאים של ההערה הקודמת (הקודמת) מכיוון, רציפה (מסודר):

$$\int_a^b f=F(c_1)-F(a)+F(c_2)-F(c_1)+\dots+F(b)-F(c_n)=F(b)-F(a)$$

כנדרש ■

<u>משפט [אינטגרציה בחלקים]:</u> תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות, ונניח גם ש-$f',g'\in R[a,b]$

אזי: $\int_a^b f'\cdot g=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b fg'$

<u>הוכחה:</u> מחוקי גזירה של חדו"א 1: $(fg)'=f'g+fg'$

שני הצדדים אינט' כי צד ימין הוא סכום של פונק' אינט' מרציפות ש... לצד שמאל (השווה לצד ימין) ברור מה הקדומה: fg.

לכן לפי ניוטון לייבניץ:

$$(f\cdot g)(b)-(f\cdot g)(a)=\int_a^b (f\cdot g)'$$

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f'g+fg' \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \int_a^b f'g+\int_a^b fg'$$

מההערה אלפיים - מש"ל ■

<u>נוכיח את הגרסה השנייה של הנוסחה של בונה</u>

<u>משפט:</u> תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש-g רציפה ו-$f\in C^1[a,b]$ ונניח גם ש-f' סו"ל בכל הקטע. אזי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש-:

$$\int_a^b fg=f(a)\int_a^{x_0} g(t)dt+f(b)\int_{x_0}^b g(t)dt$$

<u>הוכחה:</u>

נגדיר $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ מהמשפט היסודי, $\forall x\in[a,b]$ $G'(x)=g(x)$. ולכן:

$$\int_a^b fg=\int_a^b f\cdot G' \underset{\text{אינט' מחלקים ✓}}{=} G\cdot f\Big|_a^b-\int_a^b G(t)f'(t)dt=G(b)f(b)-\cancel{G(a)f(a)}-\int_a^b G(t)f'(t)dt$$

המשך הוכחה: ממשפ״ב האינטגרלי הראשון (שמ״מ)

$$= G(b)f(b) - G(x_0)\int_a^b f'(t)dt = G(b)f(b) - G(x_0)(f(b)-f(a)) =$$

$$= f(a)\cdot G(x_0) + f(b)(G(b)\cancel{x_2}) - G(x_0)) = f(a)\int_a^{x_0} g + f(b)\int_{x_0}^b g \quad \blacksquare$$