חדו"א 2ב שיעור 4

<u>תזכורת - קריטריון דרבו המשופר:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אם לכל ε קיימת חלוקה Π כך ש- $\omega(f,\Pi)<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $f\in R([a,b])$

⚠ <u>הערה:</u> אם $f\in R([a,b])$ אזי אפשר לבחור סדרה של חלוקות כך ש- $\lambda(\Pi_n)\to 0$ ובחירה של סדרת של נק' מתאימות: $S(f,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{M_n})\to\int_a^b f(x)dx$

<u>טענה:</u> "שינוי פונקציה בנקודה לא משנה אינטגרביליות". $\overset{\text{אינדוקציה}}{\Leftarrow}$ גם במספר סופי של נקודות

⚠ את הטענה אי אפשר להכליל למס' בן מניה של נקודות, <u>אבל</u> אם יש 2 פונקציות השונות זו מזו במס' בן מניה של נקודות ושתיהן אינטגרביליות, אזי האינטגרל שלהן זהה.

<u>אריתמטיקה של אינטגרביליות:</u> $f,g\in R([a,b])$, $c\in\mathbb{R}$

① $f\pm g\in R([a,b])$, $cf\in R([a,b])$

② $|f|\in R([a,b])$

③ $f^2\in R([a,b])$

④ $fg\in R([a,b])$

⑤ אם $\underline{\exists\alpha.\ |g(x)|\geq\alpha>0}$ אזי $\frac{1}{g}\in R([a,b])$ תרגול

⑥ בהינתן $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ <u>רציפה</u> אזי $H\circ f$ אינטגרבילית. (בתרגול)

<u>הוכחה:</u>

① לכל חלוקה מתקיים: $\omega(cf,\Pi)=|c|\omega(f,\Pi)$ לכל חלוקה (ולכן הטענה נובעת מקרי' דרבו המשופר).

כמו כן, $\omega(f+g,\Pi)\leq\omega(f,\Pi)+\omega(g,\Pi)$ והמשך כמו חדו"א 1...

$$\left(\begin{array}{c}\sup_I(f+g)\leq\sup_I f+\sup_I g\\ \inf_I(f+g)\geq\inf_I f+\inf_I g\end{array}\right)$$

② $\omega(|f|,I)=\sup_{x,y\in I}(|f(x)|-|f(y)|)\leq\sup_{x,y\in I}(|f(x)-f(y)|)\overset{*}{=}\sup(f(x)-f(y))=$
$=\omega(f,I)$ $\Leftarrow$ נכון לכל קטע ולכן נכון גם לתנודה של חלוקה (סכום תנודות כפול קטע)

* כי עוברים על כל הזוגות

③ f חסומה ע"י M

$\omega(f^2,I)=\sup_{x,y\in I}(f^2(x)-f^2(y))=\sup_{x,y\in I}(f(x)+f(y))(f(x)-f(y))\leq$
$\leq 2M\sup(f(x)-f(y))=2M\omega(f,I)$

④ מתקיים: $fg=\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ $\Leftarrow$ לכן אינט' לפי הטענות הקודמות

<u>תזכורת:</u> בהינתן $A\subseteq I$. A נקראת <u>צפופה</u> ב-I אם לכל קטע פתוח $J\subseteq I$ מתקיים $A\cap J\neq\emptyset$.

טענה: בהינתן $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f,g\in R([a,b])$ "מסכימות על תת' צפופה"
(קיימת קב' $A\subset[a,b]$ צפופה כך ש $(f|_A = g|_A) \Leftarrow \int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

הוכחה:

נבחר סדרה של חלוקות כך ש- $\lambda(\Pi_n)\to 0$, ובחירה של נק' מתאימות $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{M_n}$

מתוך הקב' A (משתמש בצפיפות). $\Leftarrow S(f,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\}) = S(g,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\})$

$$\int_a^b f = \int_a^b g \quad \blacksquare$$

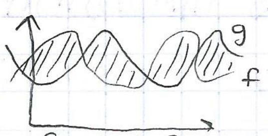
טענה: אם $f,g\in R([a,b])$ אזי $\int (f+g)(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

הוכחה: ניקח סדרה של חלוקות כך ש- $\lambda(\Pi_n)\to 0$ ונקודות מתאימות $\{t_i^{(n)}\}$

$$S(f+g,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\}) = S(f,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\})+S(g,\Pi_n,\{t_i^{(n)}\})$$

נעבור לגבול ונקבל $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ $\blacksquare$

⚠ **האינטגרל כ"שטח":** שטח של הקבוצות כנ"ל ←



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x)\le y\le g(x),\ x\in[a,b]\}$

הטל: $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

טענה: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינט' + $f\ge 0$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

הוכחה: כי לכל חלוקה ובחירה של נק': $S(f,\Pi,\{t_i\})\ge 0$.

הגדרה מתחילת השיעור + מעבר לגבול מכבד אי שוויון חלש $\blacksquare$

מסקנה: מונוטוניות האינטגרל המסוים: בהינתן $f,g\in R([a,b])$ וכן $f\ge g$ בקטע
אזי $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

הוכחה: $f-g\ge 0$ $\Leftarrow$ אינטגרבילית $\Leftarrow$ $\int f-\int g = \int f-g \ge 0$ $\blacksquare$

⚠ **הערה:** בהינתן $f\in R[a,b]$, $f\ge 0$, $\int_a^b f(x)dx=0 \Leftrightarrow \inf_J f=0$ לכל תת קטע $J\subset[a,b]$.

רעיון: $0 \le \sum \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\,\Delta x_i =: \underline{S}(f,\Pi)\le\int_a^b f(x)dx=0$

שאלה למחשבה (הפוכה): (האם "יתכן" $f\neq g$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f=\int_a^b g$ (התשובה היא לא)

משפט - לינאריות האינטגרל בתחום האינטגרציה: אם $f\in R[a,b]$, $a<c<b$ $\Leftarrow$ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

הוכחה: יודעים כבר ש- $f|_{[a,c]}, f|_{[c,b]}$ אינטגרביליות. נבחר סדרה של חלוקות של $[a,b]$ כך ש- $\lambda(\Pi_n)\to 0$ (ונניח שהנק' c נמצאת בהן). נבחר סדרה של נק' מתאימות $\{t_i^{(n)}\}_i^{M_n}$

נסמן את הצמצום של החלוקות לקטע $[a,c]$ ו- $[c,b]$ ע"י $\Pi_n^{(1)},\Pi_n^{(2)}$ ואת הנק' $\{t_i^{(n,1)}\},\{t_i^{(n,2)}\}$

המשך חדו"א II שיעור 4:

המשך הוכחה:

ולכן: $S(f,\Pi,\{t_i^{(n)}\}) = S(f|_{[a,c]},\Pi_n^{(1)},\{t_i^{(n)(1)}\}) + S(f|_{[c,b]},\Pi_n^{(2)},\{t_i^{(n),(2)}\})$

מתכנס

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

כנדרש! ■

הגדרה (תנאי הסכם): נגדיר $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

תבדקו: $\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)$ (תבדוק מקרים..)

רציפות האינטגרל המסוים:

טענה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

F מוגדרת בקטע $[a,b]$. אזי F רציפה.

הוכחה: $0\le|F(x+h)-F(x)| \underset{\text{אדיטיביות האינטגרל}}{=} \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\le} M\cdot|h| \xrightarrow{h\to 0} 0$

$(\int f(t)\le\int M \Leftarrow f(t)\le M)$

$\int M = M\int_a^b 1 \underset{\text{שיעור 1}}{=} M\cdot(b-a)$

כנדרש! ■

טענה: $f\in R[a,b]$. נניח $m\le f\le M$. אזי

(1) $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

(2) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \le \sup_{[a,b]}|f|(b-a)$

2) כי - $(-|f|\le f\le |f|\le \sup_{[a,b]}|f|)$

⚠ **הערה:** אם f רציפה, משוויון $\min_{[a,b]} f(x)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\max_{[a,b]} f(x)$

נובע שקיים $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

מחדו"א 1 - משפט ע"ב

משפט ערך הביניים הראשון: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, $g\in R[a,b]$, $g\ge 0$.

אזי קיים $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)\int_a^b g(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

הוכחה:

נסמן $M=\max_{[a,b]} f$, $m=\min_{[a,b]} f$. מתקיים $mg\le fg\le Mg$ בקטע.

מונוטוניות + אריתמטיקה: $m\int_a^b g(x)\le\int_a^b f(x)g(x)\le M\int_a^b g(x)$

נניח $\int_a^b g(x)\ne 0$ (אחרת הטענה נכונה בכל מקרה), ונקבל:

$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$. מרציפות f + משפט ע"ב מחדו"א 1 נקבל:

שקיים $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=\frac{\int fg}{\int g}$ כנדרש ■