חדו"א II שיעור 3

<u>תזכורת:</u> הגדרנו $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum \Delta x_i \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$; $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum\limits_{i=1}^{N} \Delta x_i \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$

הוכחנו ש $f\in R[a,b]$ (אינטגרבילית רימן) אם ורק אם מתקיים קריט' דרבו הבא: $\forall\varepsilon\exists\delta$ כך שלכל $\lambda(\Pi)<\delta$ אז $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$

<u>הערה:</u> אם כבר בדקנו ש $f\in R[a,b]$ ורק רוצים לדעת מהו I מותר לנו לבחור כל סדרת חלוקות Π_j כך ש-$\lambda(\Pi_j)\to 0$ (נאמר שב-Π_j יש N_j נק'), ונבחר סדרה של נק' מתאימות $\{t_i^{(j)}\}_{i=1}^{N_j}$ ונחשב:

$$\sum \Delta x_i^{(j)} f(t_i^{(j)}) = S(f,\Pi_j,\{t_i^{(j)}\}_{i=1}^{N_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} I$$

<u>הגדרנו:</u> $\omega(f,I)=\sup\limits_{x\in I} f(x)-\inf\limits_{x\in I} f(x)$ והראנו שקריט' דרבו אומר: $\forall\varepsilon\exists\delta$ לכל $\lambda(\Pi)<\delta$ $\Rightarrow$

$$\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\, \omega(f,[x_{i-1},x_i])<\varepsilon \quad ; \quad \varepsilon>\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$$

<u>ראינו גם:</u> אם $\Pi'=\Pi\cup\{p\}$ מתקיים: $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\lambda(\Pi)\cdot\omega(f,[a,b])\le\overline{\Sigma}(f,\Pi')\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$

ובאופן כללי אם $\Pi'=\Pi\cup\{p_1,\dots,p_m\}$ אז:

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi')\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi')+m\cdot\lambda(\Pi)\cdot\omega(f,[a,b])$$

ובדומה:

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi')-m\cdot\lambda(\Pi)\cdot\omega(f,[a,b])\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi')$$

* אינטגרל עליון: $\overline{I}(f):=\inf\limits_{\Pi}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$; $\underline{I}(f):=\sup\limits_{\Pi}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$ אינטגרל תחתון:

ומכיוון משום ש- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi')$ $\forall\Pi,\Pi'$ מתקיים $\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)$

<u>למה:</u> תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $\lambda(\Pi)<\delta$ אז

$$\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{I}(f)+\varepsilon$$

ובדומה:

$$\underline{I}(f)-\varepsilon\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)$$

<u>הוכחה (של העליון):</u> יהי $\varepsilon>0$. מההגדרה של $\overline{I}(f)$ קיימת חלוקה Π_0 של $[a,b]$ כך ש- $\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_0)\le\overline{I}(f)+\frac{\varepsilon}{2}$.

כעת עלינו לבחור את δ. בחלוקה Π_0 יש מס' סופי של נק', נסמן אותו N_0.

נבחר את $\delta=\frac{\varepsilon}{2N_0\,\omega(f,[a,b])}$ ותהי חלוקה כלשהי Π עם $\lambda(\Pi)<\delta$.

נסמן $\Pi'=\Pi\cup\Pi_0$. מצד אחד $\overline{\Sigma}(f,\Pi')\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_0)\le\overline{I}(f)+\frac{\varepsilon}{2}$

מצד שני:

$$\overline{I}(f)\overset{\text{מתקיים לכל חלוקה}}{\le}\overline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi')+N_0\,\lambda(\Pi)\cdot\omega(f,[a,b])\le$$
$$\le\overline{I}(f)+\frac{\varepsilon}{2}+N_0\cdot\frac{\varepsilon}{2N_0\,\omega(f,[a,b])}\,\omega(f,[a,b])=\overline{I}(f)+\varepsilon \quad \blacksquare$$

מסקנה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה כך ש- $\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$. אזי $f\in R[a,b]$

וכן $\int_a^b f=\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$. ← למעשה יש שוויון אמ"מ f אינטגרבילית.

הוכחה: נראה שמתקיים הקריטריון דרבו.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר מהנטה האחרונה את $\delta>0$ כך ש- $\lambda(\Pi)<\delta$ ⇐ $\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{I}(f)+\frac{\varepsilon}{3}$

$\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon/3$

וסה"כ: אם $\lambda(\Pi)<\delta$: $0\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\overline{I}(f)+\frac{\varepsilon}{3}-(\underline{I}(f)-\frac{\varepsilon}{3})=$

$$=\overline{I}(f)-\underline{I}(f)+\frac{2}{3}\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$$

וזהו קריטריון דרבו (כדרש
הראינו שהוא גורר אינטגרביליות) ■

מסקנה - קריטריון דרבו משופר: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. $f\in R[a,b]$ אם ורק אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ $(=:\omega(f,\Pi))$.

הוכחה:

הקריטריון שרשום גורר למעשה $\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$ כי:

$$0\le\overline{I}(f)-\underline{I}(f)\underset{\forall\Pi}{\le}\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\omega(f,\Pi)$$

וכן הקריטריון גורר ש- $0\le\overline{I}(f)-\underline{I}(f)<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$.

⇐ $\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$ ⇐ f אינטגרבילית ■

משפט: רציפות גוררת אינטגרביליות: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אזי $f\in R[a,b]$

הוכחה: נראה שמתקיים קריטריון דרבו המשופר [f רציפה ולכן בפרט חסומה על $[a,b]$]

f רציפה בקטע סגור ולכן היא רציפה במ"ש (קנטור).

יהי $\varepsilon>0$. מרציפות במ"ש קיימת $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אזי $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

במונחים אחרים, אם $|I|<\delta$ אזי $\omega(f,I)\le\frac{\varepsilon}{b-a}$. $\Pi=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$

וכעת, תהי חלוקה Π כנ"ל עם $\lambda(\Pi)<\delta$ ונחשב: $(\omega(f,\Pi):=)\ \overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)=$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\cdot\omega(f,[x_{i-1},x_i])\le\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\cdot\frac{\varepsilon}{b-a}=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$ ■

מבחירת $\delta>0$ לפי רציפות במ"ש

משפט: מונוטוניות גוררת אינטגרביליות: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית (בפרט: חסומה ע"י $\max(f(a),f(b))$, $\min(f(a),f(b))$)

אזי $f\in R[a,b]$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ונראה קרט' דרבו. נבחר את $\delta=\frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}$. נניח בה"כ שהיא עולה.

ונחשב עבור חלוקה Π כך ש $\lambda(\Pi)<\delta$: $\Pi=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\cdot\omega(f,[x_{i-1},x_i])=$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\cdot(f(x_i)-f(x_{i-1}))\le\delta\cdot\sum_{i=1}^{N}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\delta\cdot(f(b)-f(a))=\varepsilon$$ ■

המשך חדו״א II שיעור 3:

שונות משפטים "מבניים":

משפט [איחוד הקטעים]: $a<b<c$ ונתונה $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ כך ש-

$f|_{[a,b]}\in R[a,b]$, $f|_{[b,c]}\in R[b,c]$ אזי $f\in R[a,c]$.

הוכחה: נראה שמתקיים הקריטריון דרבו המשופר. יהי $\varepsilon>0$. (נבחר מאינטגרביליות

על $[a,b]$ חלוקה Π_1 של $[a,b]$ כך ש- $\omega(f|_{[a,b]},\Pi_1)<\frac{\varepsilon}{2}$

ומאחר כנ"ל חלוקה Π_2 של $[b,c]$ כך ש- $\omega(f|_{[b,c]},\Pi_2)<\frac{\varepsilon}{2}$

נסמן $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$. Π היא חלוקה של $[a,c]$ ומתקיים $\omega(f,\Pi)=\omega(f|_{[a,b]},\Pi_1)+\omega(f|_{[b,c]},\Pi_2)$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ∎

משפט [צמצום פונקציה]: תהי $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ ו- $a<b<c$. נניח

$f\in R[a,c]$ אזי $f|_{[a,b]}\in R[a,b]$ וגם $f|_{[b,c]}\in R[b,c]$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נבחר חלוקה Π של $[a,c]$ כך ש- $\omega(f,\Pi)<\varepsilon$.

נסמן $\Pi_1=(\Pi\cap[a,b])\cup\{b\}$, אזי חלוקה של $[a,b]$. $\Pi_1=\{a=x_0<\dots<x_{m-1}<b=x_m^*\}$

$\Pi=\{a=x_0<\dots<x_{m-1}<x_m<\dots<x_N=c\}$

$$\omega(f|_{[a,b]},\Pi_1)=\sum_{i=1}^{m-1}\Delta x_i\,\omega(f,[x_{i-1},x_i])+(x_m^*-x_{m-1})\,\omega(f,[x_{m-1},x_m^*])$$

$$\wedge|$$

$$\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\,\omega(f,[x_{i-1},x_i])$$

$$\Downarrow$$

$$\omega(f|_{[a,b]},\Pi_1)\le\omega(f,\Pi)<\varepsilon$$ ∎

משפט [איחוד תת קטעים ~~...~~ שמאליים]: תהי $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ חסומה.

נניח שלכל $a<b<c$ מתקיים $f\in R[a,b]$. אזי $f\in R[a,c]$.

הוכחה: שוב, נראה שמתקיים קריטריון דרבו. יהי $\varepsilon>0$.

נסמן $b=c-\frac{\varepsilon}{2\omega(f,[a,c])}$. מאינט' של $f|_{[a,b]}$ נבחר חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש-

$\omega(f|_{[a,b]},\Pi)<\varepsilon/2$. נסמן $\Pi_1=\Pi\cup\{c\}$, אזי חלוקה של $[a,c]$. ונחשב:

$$\omega(f,\Pi_1)=\omega(f|_{[a,b]},\Pi)+(c-b)\,\omega(f,[a,b])<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2\omega(f,[a,c])}\cdot\omega(f,[b,c])\le\varepsilon$$ ∎

משפט: [שינוי של ערך בנקודה בודדת לא משפיע על אינטגרביליות]:

תהיינה $g,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $x\neq x_0$ $f(x)=g(x)$, אזי $f\in R[a,b]\iff g\in R[a,b]$

הוכחה: תהי $x_0\in[a,b]$, נביט ב- $[a,x_0]$ וב- $[x_0,b]$ ובמשפחה ב- $[a,x]$ $x<x_0$, $[y,b]$ $x_0<y$

f ו- g מזדהות על כל תת הקטעים הללו (לא מכילים את x_0), לכן הן אינט' על ס

תת הקטעים $\overset{\text{מהמשפטים המבניים}}{\Longrightarrow}$ הן אינט' על ס $[a,b]$ ∎

דוגמא: $\sin(\frac{1}{x}):[-1,1]\to\mathbb{R}$ לכל $x\neq 0$, ו- $x=0$: 5.

⇐ אינטגרבילית לפי ~~המשפט~~ (המשפט) פ' המקניים.