חדו"א 2 שיעור 2

אינטגרבי רימן:

טענה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינט' רימן. אזי f חסומה.

הוכחה: יהי $\varepsilon=1$. קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi)<\delta$ ולכל בחירת נק' מתאימות מתקיים: $I-1<S(f,\Pi,\{t_i\})<I+1$.

נ"ח בשלילה ש-f אינה חסומה. נבחר חלוקה כלשהי Π_0 עם $\lambda(\Pi_0)<\delta$. $\Pi_0=\{a=x_0<x_1<\dots x_n=b\}$. מכיוון ש-$f$ לא חסומה, קיים i_0 כך ש-$f|_{[x_{i_0-1},x_{i_0}]}$ לא חסומה. לכל $i\neq i_0$ נבחר נק' $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ שרירותית (לדוגמא $t_i=\frac{x_{i-1}-x_i}{2}$).

נקבל שלכל בחירה $t_{i_0}\in[x_{i_0-1},x_i]$ יתקיים: $I-1<S(f,\Pi_0,\{t_i\}_{i=1}^N)<I+1$

$$I-1<\sum_{i=1}^N \Delta x_i f(x_i)<I+1$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{I-1-\sum_{i\neq i_0}\Delta x_i f(t_i)}{\Delta x_{i_0}}<\Delta x_{i_0} f(t_{i_0})<\frac{I+1-\sum_{i\neq i_0}\Delta x_i f(t_i)}{\Delta x_{i_0}}$$

כלומר $f(t)$ חסומה ב- $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ וזו סתירה ∎

הגדרה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. ותהי Π חלוקה של $[a,b]$. $\Pi=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

נגדיר: $M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, $m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$.

סכום דרבו עליון: $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^N \Delta x_i M_i$

סכום דרבו תחתון: $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^N \Delta x_i\cdot m_i$

⚠ ולכל נק' מתאימות ברור ש-: $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le S(f,\Pi,\{t_i\})\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$

יתר על כן: $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}} S(f,\Pi,\{t_i\})$, $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}} S(f,\Pi,\{t_i\})$

למה (מונוטוניות): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות של $[a,b]$.

אזי: $\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)$, $\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה ע"י הוספה של נק' בודדת. $\Pi_2=\Pi_1\cup\{z\}$ $(x_{i-1}\le z\le x_i)$

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)-\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\overset{\text{כל השאר יתקזז}}{=}\Delta x_i\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-(z-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},z]}f-(x_i-z)\sup_{[z,x_i]}f\ge$$

$$\ge\Delta x_i\cdot M_i-(z-x_{i-1})\cdot M_i-(x_i-z)M_i=0$$

דומה עבור $\underline{\Sigma}$ ∎

מסקנה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 שתי חלוקות של $[a,b]$

אזי: $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$

הוכחה: (כמו) $\Pi_3=\Pi_1\cup\Pi_2$ וכמובן ש- $\Pi_1\le\Pi_3$, $\Pi_2\le\Pi_3$ - עידון של שתיהן

$\Leftarrow$ $$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_3)\underset{\forall i:\ m_i\le M_i}{\le}\overline{\Sigma}(f,\Pi_3)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$$ ■

הגדרה: $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$, $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$

ברור: $\forall\Pi$: $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$

משפט: הקריטריון דרבו לאינטגרביליות רימן:

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ונניח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל Π המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$

אזי $0\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ אזי f אינטגרבילית רימן ולהפך. ($\Leftrightarrow$)

הוכחה:

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-f אינט' רימן, ונראה שמתקיים הקריטריון דרבו. צ"ל נתון שקיים $I\in\mathbb{R}$

כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ ולכל Π עם $\lambda(\Pi)<\delta$ ולכל $\{t_i\}$ מתאימות

$I-\varepsilon/3<S(f,\Pi,\{t_i\})<I+\varepsilon/3$. לכן בפרט לכל Π עם $\lambda(\Pi)<\delta$

$\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}}S(f,\Pi,\{t_i\})\ge I-\varepsilon/3$ וכן $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}}S(f,\Pi,\{t_i\})\le I+\varepsilon/3$

$\Leftarrow$ לכל Π כך ש- $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים: $0\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$ כרצוי ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-f מקיימת את הקריטריון דרבו. נראה ראשית ש $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר לפי קריט' דרבו $\delta>0$ מתאימה ונבחר חלוקה כלשהי Π_0

עם $\lambda(\Pi_0)<\delta$ כך ש $\overline{\Sigma}(f,\Pi_0)-\underline{\Sigma}(f,\Pi_0)<\varepsilon$ ואז

$0\le\overline{I}(f)-\underline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_0)-\underline{\Sigma}(f,\Pi_0)<\varepsilon$. משום ש-$\varepsilon>0$ שרירותי קיבלנו $\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$.

(כמו) $I=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ ונראה ש-f אינט' רימן עם אינטגרל $=I$.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר את $\delta>0$ לפי הקריטריון דרבו, ותהי חלוקה Π עם $\lambda(\Pi)<\delta$,

ותהיינה נק' מתאימות עם $\{t_i\}_{i=1}^{N}$ ונחשב:

$$S(f,\Pi,\{t_i\})\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)\underset{\text{לפי הקריטריון}}{\le}\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon\le\underline{I}+\varepsilon=I+\varepsilon$$

$$S(f,\Pi,\{t_i\})\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon\ge\overline{I}-\varepsilon=I-\varepsilon$$

כלומר קיבלנו $|S(f,\Pi,\{t_i\})-I|<\varepsilon$ ■

המשך חדו"א 2 שיעור 2:

הגדרה: תהי $f: I\to\mathbb{R}$, I קטע. התנודה של f בקטע I מוגדרת

$$\omega(f,I) = \sup_I f - \inf_I f$$

⚠ חישוב מגוד $\omega(f,I) = \sup_{x,y\in I}(f(x)-f(y))$

דוגמאות: • $D(x)$ פונק' דיריכלה: $\omega(D,I)=1$

• אם f מונ' עולה: $\omega(f,[a,b]) = f(b)-f(a)$

$$\omega(f,\Pi) := \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\,\omega(f,[x_{i-1},x_i])$$

⚠ f מקיימת את הקריטריון דרבו אם: $\forall\varepsilon\exists\delta: \lambda(\Pi)<\delta \Rightarrow \omega(f,\Pi)<\varepsilon$

למה: נניח $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p\}$ אז: $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)-\lambda(\Pi_1)\cdot\omega(f,[a,b])$

ואם $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p_1,\dots p_m\}$ אז: $\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)-m\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$

ובדומה: $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)+\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$

הוכחה (הראשון):

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)-\overline{\Sigma}(f,\Pi_2) = \Delta x_i\sup_{[x_{i-1},x_i]}f - (p-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},p]}f-(x_i-p)\sup_{[p,x_i]}f =$$

$$= (p-x_{i-1})\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[x_{i-1},p]}f\right)+(x_i-p)\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[p,x_i]}f\right)\leq$$

$$\leq (p-x_{i-1})\,\omega(f,[\overset{a}{\cancel{x_{i-1}}},\overset{b}{\cancel{x_i}}])+(x_i-p)\cdot\omega(f,[a,b])\leq\Delta x_i\,\omega(f,[a,b])\leq$$

$$\leq \cancel{\Delta x_i}\,\lambda(\Pi)\,\omega(f,[a,b])$$