

שיעור 1

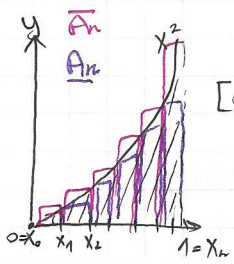
צב

תדונה

- חזון 2 - נושא: אינטגרל
- סדרות וטורים של פונקציות (טור פורייה)
- פונקציות במספר משיניים

קוויטרציה ← "בעיית השטח" = מצאו שטח של קווצר
 ← "בעיית הפונקציה" = קווצר f מצא F כך $F' = f$

מבני שטח של קווצר במישור 2



הנחה ← שטח של מלבן $b \times a$ הוא $a \cdot b$

בזמא: מצא את השטח מתחת צהף הפונ $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 1]$

רעיון: (יוון-ניטון, וייסנל...) - (סתם כ-)

$$\underline{A}_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

$$\overline{A}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

(כמון כ- A את השטח המבוקש (מתחת צהף הפונ $f(x) = x^2$),

הנחה ← ניה מונטוניות של שטח (הירס להבה)

$$\underline{A}_n \leq A \leq \overline{A}_n$$
 משתי ההנחות הנ"ל נקבל:

נא השוויון הנ"ל נכון לכל בחירה של קווצר.

כן נבחר את $x_i = \frac{i}{n}$ וכן $\Delta x_i = \frac{1}{n}$:
$$\underline{A}_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\overline{A}_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\overline{A}_n - \underline{A}_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

⚠ העובדה שההפרש שואף ל-0 לא מבטיח שהשטח (או ש- A) קיים!

סכום הריבועים:
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

כאוות חשב/שקוואח קיים וההפרש שואף ל-0

$$\overline{A}_n = \frac{2n^2 + 2n + 1}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{A}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

← מממש הסגסוף:
$$\underline{A}_n \leq A \leq \overline{A}_n$$

בעיית הפונקציה הקווצר: (ניטון)

החוק השני של ניוטון: $F = m \cdot a$ ← טווצה מסיב
 ← כהנתן (הוחנכ) זמנא תאוצה, ש' (מחברת) = זמנת ש' המיקח אלס (חלל) צמנת זס מרחות מוקח.

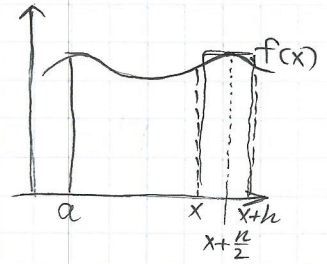
הפצה: כהנתן פונקציה f מצא F כך $F' = f$?

הצדקה: בהנחת $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ נאמר ש- $F: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ הינה פונקציה

קבועה ש f אס היא שכייה בקטע ומתקיים $a < x < b$ ו- $F' = f$

(בקטע סגור נדרוש $F_+'(a) = f(a)$, $F_-'(b) = f(b)$)

$A(x)$ - סימון (התקן הנחה כי קיים) $\int_a^x f(t) dt$ שמתחת לכלי הפונקציה
 f בקטע $[a, x]$ $(x > a)$
 $A(a) = 0$



נשנין:

$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x + \frac{h}{2})$$

נמסן $h \rightarrow 0$

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x + \frac{h}{2})$$

$$A'(x) = f(x)$$

← פתרון ובעיית הפונקציה הקבועה איננו פתור משהו על בעיית השטח.

הצדקה: חלוקה של הקטע $[a, b]$ זה אולי נקודות בקטע

$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ ו- $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (המניב סופית!)

הצדקה: עציונות של חלוקה: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda(\Pi) := \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$

הצדקה: עיצוב של חלוקה: $\lambda(\Pi_1) \leq \lambda(\Pi_2)$ בהנחת 2 חלוקות Π_1, Π_2 של הקטע $[a, b]$

נאמר שאחת החלוקות (Π_2) היא עיצוב של החלוקה Π_1 אם: $\Pi_1 \leq \Pi_2$

נשים לב שמתקרה זה נקבע $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$

הצדקה: נק' שממלינות לחלוקה $\Pi = \{x_0^a < x_1 \dots < x_n\}$ זו קט' של נק'

$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ו- $t_1, t_2, \dots, t_n$

(אין שום חוקיות בבחירת הנקודות!)

הצדקה: סכום רימאן: בהנחת $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ וחלוקה של הקטע $[a, b]$ $(\Pi = \{x_0, \dots, x_n\})$

ונק' t_i שממלינות לחלוקה, אזי הסכום הנקרא סכום רימאן של $f, \Pi, \{t_i\}$:

$$S(f, \Pi, \{t_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

הצדקה: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת אינטגרלית רימאן בקטע $[a, b]$ והאינטגרל שלה שווה ל- I

אם: I כדע קטע גדול ק שם חלוקה בעצרת מוצג עיצובות הסן מ- f

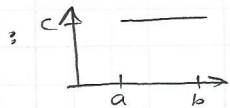
ונק' בחירה של נק' הממלינות לחלוקה $|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| < \epsilon$

1) הערה: במורה זה נאמן $\int_a^b f(x) dx = I$ ונראה כי האינטגרל המסומן של f ב- $[a, b]$

2) הערה: את אולי הפונקציות האינטגרליות רימאן בקטע $[a, b]$ נאמן כי $R[a, b]$

תלמיד חדר 2 ושיעור 1

$$I = C(b-a)$$



צוואה: $f(x) = c$ בקטע $[a, b]$

צוואה נוספת: פונקציית ציטה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ בקטע $[a, b]$

טענה: $D(x)$ אינה אינטגרלית בקטע $[a, b]$.

הוכחה: נניח בשלילה שההצדה ב מתקיימת. יהי I ק"ש $\dots$.

כפרט מתקיימת עבור $\varepsilon = \frac{b-a}{6}$. נקח את ה- δ המתאימה. ונבחר חזקה מתאימה.

נבחר פלגיות מתאימות וחזקה רציונליות ופלג אחת אי רציונלית, ונקבל

$$\triangle \quad |0 - I| < \varepsilon \quad \text{ואם} \quad |(b-a) - I| < \varepsilon \quad \text{ועבור} \quad \varepsilon = \frac{b-a}{6} \quad \text{א מתירה}$$