5/5/13
עמ' 1

תורת המטרואידים - שיעור 8

עמכם הסליחה, שכחתי את הטוש הירוק.

(1)(ב) בשיעורי בית 4: (1) n מעגלים זרים בגודל n. מצאו את החלוקה.
(2) האם x שייך למעגל כלשהו.

משחק המיתוג של שאנון - TAKE 2

חוקי המשחק הוסברו בחלק האחרון של שיעור 4.

__בכמה מילים:__ E מטרואיד, $e\in E$ "איבר היעד". המחבר רוצה להשלים מעגל ב-E,
מטרת המנתק למנוע זאת = להשלים קו-מעגל הכולל את e.
מחבר מכווץ את הקשתות שבחר, והמנתק מסיר אותן (=מכווץ ב-M^*).

כבר הוכחנו שהמשחק מסתיים בניצחון של אחד השחקנים. (נובע מ- $|C\cap C'|\neq 1$ כש-C,C' מעגל וקו-מעגל
כלשהם ב-M). (הוכחה אלטרנטיבית - e נפרש ע"י A ב-M או ע"י B ב-M^*, ולא שניהם) ($A\uplus B\uplus \{x\}=E$)
את שני הטיעונים ראינו בשיעורי הבית.

המשחק הוא __מונוטוני__. כלומר לא אומרים "לא תודה" על צלע. זה לא מזיק.
לכן, אם לשחקן יש אסטרטגיה מנצחת כשהוא שני, יש לו כזו כשהוא פותח במשחק:
__צעד ראשון:__ בחירת איבר שרירותי. ועכשיו הוא כבר שני... מבין =)

לפיכך, כל המטרואידים בעולם מתחלקים לשלוש קבוצות:
- מצבי מחבר - המחבר מנצח כשהוא שני (וכמובן גם כשהוא ראשון - כלומר תמיד).
- מצבי מנתק - המנתק מנצח " " (תמיד).
- מצבים ניטרליים - הפותח מנצח.

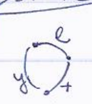
מסקנת ביניים

__דוגמאות__

__מצב ניטרלי__

__מצב מחבר__

__מצב מנתק__



(אגב, שני האחרונים דואליים... ולא במקרה)

__סימונים:__ $M=(E,I)$, $S=E\setminus\{e\}$, $e\in E$ "יעד":

__משפט 1__

M,e מחבר (=המחבר מנצח) $\Longleftrightarrow$ ק"מ T, $T\subseteq S$ כך שיש ב-T שני בסיסים זרים (ב-M/e) A,B, ו- $e\in span(T)$

5/5/13
עמ' 2

הוכחה

⇐: (תהי T המובטחת, עם A,B שפורשים כל אחד (את T) וגם את e. נוכיח e- M,e מחבר).

הוכחה באינדוקציה על |T|:

בסיס: $|T|=0$. אז $A=B=\emptyset$, והן אכן זרות. דרגתן אפס, ולכן מכך ש- $e\in Span(\emptyset)$, e לולאה.
רגע, לולאה? המשחק נגמר, המחבר ניצח!

צעד האינדוקציה:

T,A,B כאמור למעלה. המנתק פותח. $\boxed{\text{נניח שהפתיחה היתה הסרה ב- } A\cup B}$ בה"כ, הוסר $x\in A$ ($x\notin B$). לפי אקסיומת הבסיסים, קיים $y\in B(\setminus A)$ כך $(A\setminus\{x\})\cup\{y\}$ הוא בסיס.
כעת, B, $A\setminus x\cup y$ הם בסיסים ב-M שמכילים את y.
תורו של המחבר. הקהל עוצר את נשימתו. המחבר מהסס מעט, אך מחליט לכווץ את y.
נותר $((M|T)-x)\cdot\!-y$. בעצם, מטרואיד זה הוא $(M-x/y)|(T\setminus\{x,y\})$. (קודם נסיר ונכווץ ואז נצמצם) כי מותר להחליף סדר.
$A'=A\setminus\{x\}$, $B'=B\setminus\{y\}$ נסמן $T'=T\setminus\{x,y\}$. A',B' הם בסיסים זרים ב-' , ופורשים את e.
מכאן ממשיכים באינדוקציה.

#קצת אינטואיציה למקרה הגרפי - A ו-B שני עצים פורשים זרים של תת-גרף T שפורשים גם את e. מחבר הסיר את x מ-A. נענה לו בבחירת האיבר ב-B שמחבר את שני הרכיבים שנוצרו ב-A השבור.

$\boxed{\text{נניח שהפתיחה של המנתק היתה הסרה מחוץ ל- } A\cup B}$. הקהל מצחקק במבוכה, כי המנתק (האיום ממילא) עשה מהלך מטופש אם נלך לאינטואיציה הגרפית, הוא אפילו לא נגע בשני העצים שלנו. המחבר בוחר בשמחה צלע ב- $A\cup B$ (לא מחוץ) ועדיין T תכיל תת-קבוצה שמקיימת את התנאי (רק נסגרו מעגלים, הבסיסים לא נפגעו).

⇐ (הצד הקשה!) תנאי לקיום שני בסיסים זרים של T (אדמונדס):

$$\forall A\subseteq T.\ |T\setminus A| \geq \underset{\text{שני בסיסים}}{2}(\rho(T)-\rho(A))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall A\subseteq T \quad 2\cdot\rho(A)-|A| \geq 2\cdot\rho(T)-|T| \qquad (*)$$

נראה שמתאים להגדיר כאן $f:P(E)\to\mathbb{R}$ באופן טבעי.

$$f(A)=2\rho(A)-|A|$$

בעצם התנאי (*) שקול לכך ש- T נקודת מינימום של f ב- P(T)!

#נדבר קצת על פונקציות תת-מודולריות. זה נושא חשוב ומעניין, ואולי במקרה זה יתקשר גם להוכחה שהפסקנו באמצע.

5/5/13

עמ' 3

פונקציות תת מודולריות

הגדרה: פונקציה $M:P(E)\to\mathbb{R}$ תקרא מודולרית על E סופית

$\Longleftrightarrow$

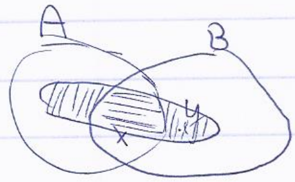
$$M(A\cup B)+M(A\cap B)=M(A)+M(B)$$

דוגמה: פונקצית העוצמה, או פונקצית משקל אחרת.

הגדרה: פונקציה היא תת מודולרית $\Leftrightarrow$ $M(A\cup B)+M(A\cap B)\le M(A)+M(B)$

תרגיל: פונקצית הדרגה של מטרואיד היא תת-מודולרית.

פתרון:



יהי X בסיס של $A\cap B$ ו-Y השלמה שלו לבסיס של $A\cup B$.

$$P(A)+P(B)\ge |A\cap Y|+|B\cap Y| \underset{\text{כי העוצמה מודולרית}}{=} |(A\cap Y)\cup(B\cap Y)|+|A\cap Y\cap B\cap Y| = |Y|+|X| = P(A\cup B)+P(A\cap B)$$

$P(A)\ge |A\cap Y|$ כי זו קבוצה בת"ל ב-A. אבל לאו דווקא בסיס.

$\boxtimes$ תרגיל.

צירוף לינארי במקדמים חיוביים של פונקציות תת מודולריות, הוא תת מודולרי.

פונקציה מודולרית, לצורך זה, יכולה לקבל גם מקדם שלילי (כי גם בהיפוך סימן האי-שוויון נכון).

והדרך להוכחה של משחק המיתוג! **טענה:** $f(A)=2P(A)-|A|$ תת מודולרית. **הוכחה:**

משפט: משפחת נקודות המינימום של פונקציה תת מודולרית סגורה לאיחוד ולחיתוך.

הוכחה: תהיינה A,B נק' מינימום של M תת מודולרית. $M(A)=M(B)=m$.

כעת לטיעון סנדוויץ'.

$$2m\underset{m\text{ מינימום}}{\le} M(A\cup B)+M(A\cap B)\underset{\text{תת מוד}}{\le} M(A)+M(B)=2m$$

מכאן, $M(A\cup B)=M(A\cap B)=m$ וכך משפחה!

$\boxtimes$ משפט.

קיימת קבוצה מקסימלית (ביחס להכלה) בין נקודות המינימום של M. $X=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

כל הקבוצות המינימום... גם X כי סגור לאיחוד.

תהא X נקודת המינימום המקסימלית של $f(A)=2P(A)-|A|$ ב-$S=E\setminus e$.

השקילות למינימום.

(מכאן) ב-X שני בסיסים זרים A,B לא מכילים את e.

יופי. נראה כעת שאם $e\notin span(X)$ אז X היא מינימום של f לא רק ב-S אלא גם ב-$E=S\cup\{e\}$

ואז נוכל להגיע לסתירה.

אז במקרה בו $e\notin span(X)$ מעניין

ok $\circledast$ $e\in span(X)$ אז

5/5/13
שי' 4

נניח ש-X ~~בשלב~~ אינה מינימום גלובלי. ⇐ קיימת $Y \subseteq S$ כך ש-

$$f(X)=m > 2\rho(Y\cup\{e\}) - |Y\cup\{e\}| \geq (2\rho(Y)-|Y|) - 1 \geq m-1$$

אז (א) $f(Y)=m$, ולכן $Y\subseteq X$ מהגדרת X.
(ב) $\rho(Y)=\rho(Y\cup e)$ כי אחרת מתפספס האי-שוויון. $e\in Span(Y)$.
$e\in Span(X)$ והגענו לסתירה. כי אמרנו ש-$e\notin Span(X)$ ...

הוכחנו: אם $e\notin span(X)$, X מינימום גלובלי. (היו כאן כמה קפיצות קטנות בלוגיקה...)

עבור ל-M^*. נגדיר: $f^*(A) = 2\rho^*(A) - |A|$

⇓ דרגת הדואלי

$$f^*(A) = 2(|A| + \rho(E\setminus A) - \rho(E)) - |A|$$

⇓

$$f^*(A) = |A| + 2\rho(E\setminus A) - 2\rho(E\setminus A)$$

⇓

$$f^*(A) = 2\rho(E\setminus A) - |E\setminus A| - 2(\rho(E) - |E|)$$

⇓

$$\boxed{f^*(A) = f(E\setminus A) - f(E)}$$

קבוע

X היא מינימום של f $\iff$ $E\setminus X$ היא מינימום של f^*

עפ"י ההנחה, $X\subseteq S$ אינה פורשת את e, והיא מינימום גלובלי ב-E.
$Y=E\setminus X$ היא מינימום של f^*, או מינימום של f ב-M^*.
e שלא נפרש ע"י X, לכן $e\in E\setminus X$. ל-Y יהיו שני בסיסים (ב-M^*) כי הוא מינימום של f ב-M^*.
לכן יש A,B בסיסים זרים. אם $e\notin A\cup B$, אז M^*_e מנותק ⇐
⇐ M_e מנותק. ⇐ M_e לא מחובר.
אחרת $e\in A\cup B$. בה"כ $e\in A$. במקרה כזה, למנתק יש אסטרטגיה מנצחת כמו מתחיל.
$e\notin B$ כי הם זרים.

$A\setminus e\cup y$ עבור y ב-B הוא בסיס, והצעד המנצח של המנתק יהיה כזה (בדואלי) של y. ⇐ M_e לא מחובר. $\boxtimes$ משפט 1

או הסרה במקורי

המחבר: "איך אסגור מעגל בלי y?! תקולל ההגרלה!"

#עוד קצת פרשנות - X שמצאנו היא T שצריך לחשוף למה שקורה לכיוון ⇐ התנאי בצד שמאל

5/5/13

סיימנו את הוכחת המשפט!

[האם כעת אנחנו שחקני Shannon מוסמכים? לצערנו עדיין לא יודעים איך לעשות את כל מה שקרה במהלך ההוכחה (למשל-למצוא מינימום של פונקציה תת מודולרית...) אבל יש מי שיודע.]

__דוגמה:__

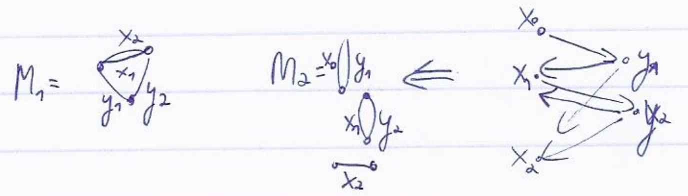
$S=\{t\}$.

$X=\phi \Leftarrow F(\phi)=0 ,\ F(\{t\})=1$

$Y=E\setminus\phi=E$. $\{e\},\{t\}$ שני בסיסים זרים. אבל אחד מהם מכיל את e.

כמו שאמרנו, למתקף יש צעד מנצח אם הוא ראשון, וזו הסרת t.

__פתרון שאלה 4 בש"ב__



ניתן להבחין שמה שחשוב הוא לא מסילה קצרה ביותר, אלא פ׳ קצר־דרך.

בעצם, כל סדר של הכנסת x־ים הוא סביר, כל עוד כש-x נכנס (וה-y שלו יוצא) כל ה-y־ים שהצביעו על x/ הצביעו עליו) עדיין נמצאים שם.

__פורמלית:__

כדי ש-$S\Delta I$ עדיין יהיה חירוק, דרוש למצוא סדר על הזוגות $\{x_i,y_i\}$ כך שאם $\{x_i,y_i\}$ בא לפני $\{x_j,y_j\}$ לא קיימת קשת מ-y_i ל-x_j (M_1). עבור M_2 אפשרי סדר אחר. מתי יש לנו סדר כזה? (יותר מעניין - מתי לא?)

נמשיך לדבר על זה בשבוע הבא.