14/4/13
מע' 1

תורת המטרואידים – שיעור 5

אורקלים, מטרואידים והדרכיה הפולינומיאלית של הס

רמז ב שאלה 4 נפתרת אם שלה 5, ומטענק 9. ↓ A תשובה.

בתרגיל: נניח ש $|V|=m$. נסרוק כ- $P_n(m)$ ונחפש מה S כמו ב-5 כמה שיותר שלה.
כלה היה טריק שיתבור במהלך הים.

נבנה את S: ניקח A בן שני מ- $P_n(E)$. נסרוק מי כמה נוסף יהיה על ידי ב-5:
לפי הקבוצות הסטנדרטיות ל- A (מדיום אחד ומוסיפים אחד). יש m כאלה!
נסיר הקבוצה שלה מ- $P_n(E)$ ונמשיך הלאה. בכל שלב, עם כל קבוצה שהוספנו
לפי לכל לכל היותר m. את $\binom{m}{n}$ $\leq$ $\frac{m^n}{n!}$ $\leq$ m^n $\leq$ $(m-2)^n$
סתם שיהיה כלי.

וכאמור, לפי הימר $2^{m^2} = |P(P(E))|$.
ואלו אופציות לפי תת קבוצה של S ל"הצדיר מטרואיד", לכן יש לפחות $2^{m(m-2)}$

איך נתאר מטרואיד עם n איברים? לפחות n איברים.
כיצד מתארים אלף? למשל, השאר קשתות לפי אחת לוח קודקודי הקבה (יש אולי שיטה).

מטרואיד ו"מטרואידים מדרכי כפולי", לפי נתרק (כפולי) אלף ב"טים כפי ש"ב
מדרכי $\binom{m}{n}$ ב"טים כדי לתאר מטרואיד בגודל n. לה הכרחי להאמת כי **מתקיה**
שאלה יש מספר מדרכי כפול של מטרואידים, אך נצטרך

מדרכי כפול n.
מס' המטרואידים הלאו אוטומורפיים על n איברים הוא מספר גדול
מה את נעשה לפעמים מטרואידים אוטומורפיים? אולי מה שמדרכי? לכן.

כמעט, אם מבצעו אלגוריתם (מכונת טיורינג) שמצליח פולינומיאלית על מטרואידים...
לה היה פלא, בגלל הקלטה = גודל הגיטו של המטרואיד = מדרכי.

אך בסופו מה מדרכי **[illegible]** ב- $|E|$, שיכיל נעה את הלשאול בגרף...
לאחר ↓ מטרואיד מדרכי כפולי, לפחות נצטרך (כפולי) אלף ב"טים כדי ל"ב
מדרכי גם $\binom{m}{n}$ ב"טים כדי לתאר מטרואיד בגודל n. לה הכרחי להאמת כי **מתקיה**
שאלה יש מספר מדרכי כפול של מטרואידים, אך נצטרך

14/4/13

שע' 2

פונקציות לאלגוריתם מטרואידים - האלגוריתם החמדן!

אלגוריתם. מתי משתמשים באלגוריתם החמדן במטרואיד (שיש בשפע ב"...)? בבעיית האופטימיזציה.

1. מ בדיקת שאותות.
2. בדיקת העצמאות.

נדרש לבדיקת העצמאות כאן פונקציה! כך שלא נצטרך להתייחס בכל פעם למטרואיד. נתייחס לאוראקל כשלם קופסה שחורה

אלגוריתם מטרואידי הוא בעיקרו "אלגוריתם רגיל" (קומבינטורי) הכולל קריאות לאוראקל מטרואידי. (יתד או רמז-למען אוקל "האם קבוצה בת?" או אוראקל "האם קבוצה פורשת?")
כאשר אוראקל כפשוטו הוא הפונקציה שאותה המחשבת פונקציה מטרואידית.
מימוש האלגוריתם למשפחה מסוימת של מטרואידים הוא מימוש האוראקל כאלגוריתם מפורש עבור אותה משפחה.

#הרושמה הסיבוכיות של אלגי מטרואידי כפי קריאה לאוראקל נמנית (בעבודה כפונקציה אחת. סיבוכיות אני מתכוונת: למעט מהאוראקל, כלומר הסיבוכיות: $O(\log n)$ קומבינטורי, ואז $O(n)$ קריאות לאוראקל בדיקת-אחת-מהן.

#שאלה מעניינת רגע מי: האם אפשר להתגלגל שימוש באוראקל אחד (בניגוד ל"האם A≠∃ מעגל?") באוראקל אחר ("האם A≠∃ הוא של מישהו?" או "מי מהשניים של A?")

#סיכום: לסיכום האוראקלים עוזרים כמה. היו אוראקלים שנתנו למימוש ע"י אחרים רק באופן אקספוננציאלי. וואו!

תשמרת האוראקלים

- $BASIS(A): P(E) \to \{True, False\}$ - האם A היא בסיס?
- $CIRCUIT(A)$: - האם A היא מעגל?
- $FLAT(A)$: - האם A היא שטוחה?
- $HYPER(A)$: - האם A היא על-מישור? (היפרפלאן)
- $IND(A)$: - האם A היא בת"ל?
- $SPAN(A)$: - האם A פורשת? (או"א)
- $RANK(A): P(A) \Rightarrow \mathbb{N}$ - מהי דרגת A?
- $CLOSURE(A): P(A) \to P(A)$ - מהו הסגור של A?
- $GIRTH(A): P(A) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ מהו אורך המעגל הקצר ביותר ב-A. ∞ אם A בת"ל

תשמרת הקשתות

$a \to b$ ("a שייך על b בפונדמנטלי")

לשני אוקלים a, b, ונאמר ש-a "שייך בפונדמנטלי" על b אם ניתן למשב את b ע"י מספר סופי, של קריאות לאוראקל-a ופעולות קומבינטוריות.

ובאו' שמדובר בי"ס סדר (טרנזיטיבי, רפלקסיבי, אנטיסמטי וכו')

ניתן ל-a ושם $b \neq a$ ולכן $a \to b$

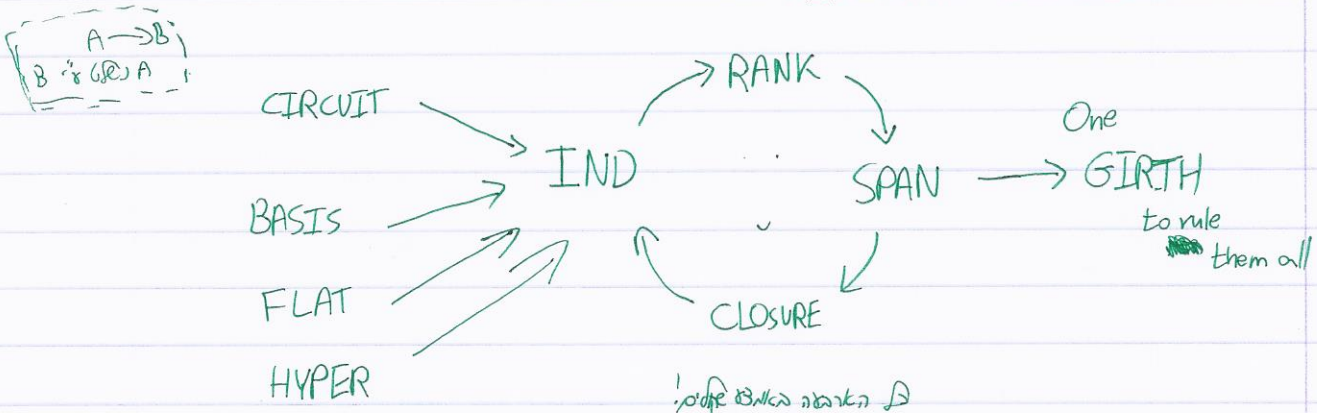
נגדיר את "השדה הטרנזיטיבי" של a להיות

054292794

14/4/13

עמ' 3

משפט: (הוסמן - קורטה 1977)
מערכת השלטה הבלתי, בין תשעת האילוצים (בב) מתאבה למסווג הטרנזיטיבי של הגרף הבא:



ב הארמה באותה שקיפות!

נתחיל מתת השאילוצים באותה.

נראה: (1) $IND \propto RANK$. ז"א שלכל מטרואיד בגודל n יש בו לפחות n בת"ל. נשאל מה הדרישה, ונבדוק שהיחס עומד בה.

$IND \overset{\circ}{\rightarrow} RANK$

$IND(A) \iff RANK(A) = |A|$

(2) $RANK \propto IND$. ז"א שלכל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $\delta > 0$ כך שלכל A... שמספיק קרוב ל-IND (כלומר: $RANK(A) \geq (1-\delta)|A|$) מתקיים $IND(A) = 1$. נשים לב שזה בדיוק השיוויון שהוכחנו. ולכן הדרישה. היו כאן $|A|$ קבוצות בלתי תלויות.

$IND \Leftrightarrow RANK$,אז כלומר:

(3) $RANK^* \propto RANK$: ז"א שלכל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $\delta > 0$ כך שלכל A. נוסחת הדרישה שמצאה היום, אומרת:
$RANK^*(A) = |A| + RANK(E \setminus A) - RANK(E)$ (נתעלם מהקידומת בנוסחה)
וקיבלנו שלכל $\varepsilon > 0$ שלכל $RANK^*$ ע"י $RANK$.

(4) $IND^* \propto RANK^*$ (בדומה - (2) מאותו הדבר)

(5) $IND^* \propto SPAN$. כלומר שלכל $\varepsilon > 0$ שלכל $SPAN$ ובדיוק תשעה אילוצים בדיוק.
$IND^*(A) \iff SPAN(E \setminus A)$ (A בדיוק $\Leftrightarrow$ $E \setminus A$ לא מעיקר בדיוק).

$RANK \propto SPAN$ (3+4);

(6) $SPAN \propto CLOSURE$. ז"א שלכל $\varepsilon > 0$ סגור. איך ומתי את A בדיוק?

$SPAN(A) \iff CLOSURE(A) = E$

זה כה:

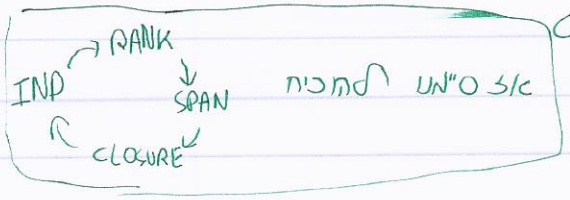
14/4/13

עמ' 4

⑦ $CLOSURE \propto RANK$. יותר קשה להוכיח. נסמן ש מייצג את הבסיס A.

$$CLOSURE(A) = \{x \in E \mid RANK(A \cup \{x\}) = RANK(A)\}$$

רואים קריאות ל-RANK...



צריך 3 מ"מ להוכיח

⑧ $CIRCUIT \propto IND$:

$$CIRCUIT(A) \iff \neg IND(A) \wedge \forall x \in A.\ IND(A \setminus \{x\})$$

הוכחת הלמים

⑨ $BASIS \propto IND$. כי $BASIS(A) \iff IND(A) \wedge SPAN(A)$

↑ ובכך ראינו ש-SPAN ניתן לחישוב ע"י IND.

⑩ $FLAT \propto CLOSURE$, כי $FLAT(A) \iff CLOSURE(A) = A$.

⑪ $HYPER \propto RANK$ כי $HYPER(A) \iff (RANK(A) = RANK(E) - 1 \wedge FLAT(A))$

מותר להשתמש ב-FLAT כי כבר הוכחנו שאנו יודעים RANK וחישוב.

הוכחת הלמה

⑫ $IND \propto GIRTH$

$$IND(A) \iff GIRTH(A) = \infty$$

#כמה נרצה להוכיח אי קיום של בעיה בשלב הבא.

נראה כי CIRCUIT $\not\propto$ BASIS, FLAT, HYPER

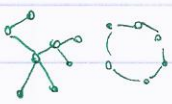
למרות שכל IND למעלה מהווים ע"י CIRCUIT כי אפשר למצוא דרכו CIRCUIT. וכו'.

[צריך להדגיש שיתכן שאפשר לפתור את BASIS למשל ואי אפשר לפתור את CIRCUIT.]

נתון שלך ובו n קשתות ומי מטרפ יחד C. מצא את C.

מי קשתות

#כל מה שאומר לנו כרגע לשלוף את האוסף. חוץ מכך יכול רואים את הגרף.)



פתרון עם BASIS: הפוטנציאל - כל $x \in E$ שמתאים.

אנו נשאל על כל הקבוצות בגודל $n-1$ (n קריאות) האם הן בסיסים. על כל x, אם $x \in E$ מסוג x במתאים, ואחרת לא. וכך נקשט את כל ה-x'ים ב-C ונמצא את C (n קריאות)

פתרון עם HYPER:

נסתכל שוב על כל הקבוצות בגודל $(n-1)$. אם $x \in E$ של מישהו, x נ"ל נמצא. אם $x \in E$ לכל מ-מישהו, אז x בטוח במחלקת כי הגרפים מהווים עדיין n. אז כמו קודם, ה-n קריאות מצאו כך את המחלקת.

14/4/13

עמ' 5

פיתרון עם FLAT

אותו טריק: נגדיר x. אם EIX סאדה, x מייצר. אחרת EIX לא סאדה, x הוא חלק מהמשלים.

נוכיח שאין פיתרון עם CIRCUIT

לא משנה מה נבחר, בלי שקשה נוכל לפסול לך בקלות את. מעל 2^n.

תמיד נוכל למצוא ל-2^n לא-טי, שקבלת כן לך בסוף (את עוזה מוכח רגע...)

#אפשר היה להגיד את הטענה בצורת הכחדה - אין בלב - או שיש או מוכח או שאין.

BASIS - נבחר את E בסיס.

FLAT, HYPER - הוא יש איזשהו שם קל ושאחת... (בשפלה).

CYCLE - שזה נבחר לשאול על כל המשלים!!!

את ראינו BASIS, HYPER, FLAT & CYCLE (יותר הלפ מכל גדול CYCLE)

טרם נראה HYPER, FLAT, CIRCUIT & BASIS

הערה: ניתן מטרוויד נראה, אם קשרות המתולקות ל-n יוצאת שקבילות 0000

מצא תלוקה P שבה יהיה השוני. (לשני צדדים)

פיתרון עם CYCLE

נעבור על כל הצורות ונשאל אותן מהמשלים. ואז ניקח את כל הצורות וסיימנו.

פיתרון עם FLAT

נעבור על כל הצורות ונשאל אותן סאדה. ואז ניקח את כל הצורות וסיימנו

משלים, במקרה זה.

פיתרון עם HYPER

תמטרוויד דואלי, לעצמו. עם מישור = משלים ל-$x_1x_2\cdots x_n$ = מאיים ל-x_1x_2. כלומר נגריד לכל

לשאול אם כזה עם מישור וכך נקבל את הצורה. דואלי לעצמו.

אין פיתרון עם BASIS:

מספיק הוא כ"ל. יש טעם לשאול רק על קבוצות בגודל n. (אחרת התשובה היא לא).

ומה האינפורמציה שנשלוט כאלה? שדיין קטנה. נחשב:

שאנחנו "שיקלל שרון", השיקול משלה ש"ב ב (מגדלת השאלה)

יש $\frac{(2^n)!}{n!\cdot 2^n!}$ צורות אפשריות כאלה. נזכור על n אוכלוסים, קבוצי לא. בסהכ $n!$ אפשרויות

כלומר נקבל לפחות: $\frac{n!\cdot 2^n!}{(2^n)!}$ ניחוש (מינימלי)

14/4/13

עמ' 6

שנה יוצא $\frac{\binom{n}{n}}{2^n} \approx \frac{4^n}{2^n}$ והיחס יוצא מעריך n: מספר המעגלים של שלמות BASIS.

הרצאה HYPER, FLAT, CYCLE & BASIS

נראה CIRCUIT, BASIS & HYPER, FLAT (מוסיפים מאמר 4 בפרים).

הגדרה: נתון גרף עם n קשתות: (לולאות) וקבוצה של קשתות מקבילות.

נרצה למצוא את הלולאות.

פיתרון עם CIRCUIT: נשלוף על כל x_i אם הוא מופיע כן ⇔ הוא לולאה.

פיתרון עם BASIS: נשלוף על x_i אם הוא מס'. לכו ⇔ הוא לולאה.

אין פיתרון עם FLAT: הקבוצה המוארת: ① קבוצת הלולאות ② $\bar{E}$. } משנים עבורם שלמות.

אין פיתרון עם HYPER: שני מישרים: ① קבוצת הלולאות.

והרחבה! נוכל להראות HYPER & FLAT, FLAT & HYPER, GIRTH-1 & IND אלגי.

נראה: HYPER & FLAT

הגדרה: יהי $E = A \cup B$ (A, B מתנגדים). A קבוצת קשתות מקבילות, B קבוצת קשתות מקבילות

① מקבילות ② מתלקח לשני קשתות מקבילות.

הבחנה: הלולאות B כאן או אחרת.

פיתרון עם HYPER:

נשלוף את A עם מישור. ב-① יהיה התשובה כן. ב-② לכו.

אין פיתרון עם FLAT: A מוארת, B מוארת... לכל אחד אחר. ההבדלים היחסים בין תשובות FLAT בין ① ל-② הן, כאשר שלפנו את C ו-D. אזי אם מוארכי של שלמות.

נראה HYPER & FLAT: (בפעם הבאה).