10/3/13

תנ' 1

תורת המטרואידים - שיעור 2

אין אתר לקורס. בדרך לשאול מייל עם השם שלך לטרסי -
TARSI@POST.TAU → שם, מאמר עיוני, והסבר למאמר שלעיריאמה מוקדם סיבוכיות ברפים

שיעורי הבית והחובות ישלחו במייל. היום יש שיעור מופסים.

אפשר למדוד כיוון מקסימלי בגרף "מלכות" באמצעות האלגוריתם החמדן. (?) ← מסקנה מהשיעור הקודם.

#כלה לפי המבנה. האלגוריתם למציאת כיוון מקסימלי, אומנם יעיל אך מורכב.
למזלנו רק לגרף דו"ב מסדר (כרימה השיעור).

אך איפה התרמית? מתפיקת הנאותות היא קשה! הוספנו קידוד/פענוח...
איך נדע אם יש כיוון שמכסה את הקודקודים שלנו כרשע?!

ערכנה כאת מטרואיד נוסף תיצבר מגרף - המטרואיד הקו-גרפי.

גרף $G=(V,E)$.

$$M^*(G=(V,E)) = \left(E, \left\{A\subseteq E \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{הסרת}\\ A\\ \text{אינה מגדילה}\\ \text{את מס' רכיבי}\\ \text{הקשירות}\end{array}\right\}\right)$$

(A אינה "מנתקת" את הגרף)

עניין M טרוויוליי.

המדיה הולשעריתמי
יש גרף. כמה קשתות אפשר להוריד בלי לפגוע בקשירות?

למה כזה מטרואיד? $I\ni\emptyset$, וכמובן I יורשתי (הורדת קשתות בלעדי יפר מתקף).
נותר להוכיח את אקסיומת החילוף.

תהיינה A,B לא מתקיים $|A|<|B|$. עבור גרף G קשיר (כך בעצם לא משנה... סתם נוח. אחרת יש רכיב קשירות גדול וקודקודים אחרים.)

נסמן $G_A=G\setminus A$, $G_B=G\setminus B$.

שימו לב קשירים, ואילו $|G_B|<|G_A|$ (הורדנו פחות בלעדי).

נרצה למוכיח שיש קשת מ- G_A שאפשר להוריד בלי לגרום $\equiv$ שמגדיל את מספר הרכיבים של G_A. (כלומר אפשר לחבר את G_A כשמוריד אותה)

עבור כל קשת x ב- G_A נבדוק מה קורה כשמחברים אותה מחדש ל- G_B (שימו לב כי G_A מכיל מספיק קשתות כך שהגרף קשיר).

תהיינה X,Y קשתות שונות ב- G_A שהשיבת למספר הרכיבים. אם אינה שייכת ל- G_B, ס"מ, אותה, כל המסלול נמצא ב- G_B. אז נסיר את X משניהם. לא ניתקנו פעם!

נמשיך עם הגרפים הנותרים ($G_A\setminus\{X\}$) ...

מצאנו $|G_B|<|G_A|$, לכן המסלולים ב- G_B יישארו לפחות המסלולים ב- G_A (ניצור קופסא ל- n בשעה).

$A\boxtimes$

- המטרואיד הקו-גרפי,
הוא אכן מטרואיד

הגדרה: מטרואיד "קרוב ברמה אופק הוא אוניפורמי" למטרואיד המתקבל על ידי.

דוגמה 1: $U_{2,3}$ הוא שבו כל תת הקבוצות בגודל 2 מתוך קבוצה בגודל 3.

ואכן כל שני איברי בחור משפט בדוגמה

דוגמה 2: $U_{1,m}$ הוא שבו. ציירו:

דוגמה 3: $U_{n,n}$ הוא שבו. (בגלל הקבוצה) כל בחירת n קשתות בלתי מתלכדות!

✓ גרפים ש-3 קשירים (קודקודים) $\neq$ מתאימים על ידי המטרואיד שלהם.

X גרף מוזר לפי מטרואיד המתקבל שלו. למשל בדוגמה שלנו, n קשתות

הכוס ניתן לשנות את תורת הגרפים בעזרת המטרואידים.

כן, ניתן לשחזר גרפים 3-קשירים (ומעלה). ← ?

דוגמה 4: $U_{0,n}$ הוא שבו: ○ ו ○○ (לולאות!)

#הבסיסים של מטרואיד שווה מספר קבוע.

-בזכות למטרואיד לא הוא שבו:

#הדרכים של $|M|$ כאשר G קשיר הינו $|V|-1$ (הגרף הפוך מיותר ללא מעגלים).

#מספר הקשתות המקסימלי, בגרף פשוט - $\binom{n}{2}$.

$U_{2,4}$ אינו שבו: $\{\{1,3\}, \{2,4\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \emptyset\}$

ב ומעלה ברור: אין קשתות מקבילות. ② אין קשתות מקבילות

אלו הם n איברים=קשתות. אין מעגלים לולאות וקבוצת סגירה.

אלו יש בבסיס 3 קודקודים,

$U_{2,3}$ הוא ב. אלמלא היה גרף, הוא היה חייב להיות קשיר (כי כל שני צמתים את נוסף לפחות קשת)

מטרואיד Fano:

לא שבו: אלה מטרואיד

#בדיוק כל שני קודקודים מוגדר שני אחד בסבב.

שקשת נשארת בין אם אויב "שני על המישור."

#כל רביעיה היא קבוצה תלויה

למטרואיד ד איברים (הקודקודים)

הדבי מעגל הוא בסבב יש

הצגה בסיסית לפני שנמשיך לדבר על Fano.

מונח	הגדרה	$M(G)$	$M^*(G)$	$U_{k,n}$	F_7	מטרואיד וקטורי
קבוצה בת"ל		יער	קבוצה שלא מכילה חתך	קבוצות בגודל $\leq k$	שאינה מכילה יותר מ-k וקטורים.	בת"ל לינארית.
קבוצה תלויה	קבוצה שאינה בת"ל (=)	קבוצה עם מעגל.	קבוצה מינימלית.	$\leq k$ " "	שאינה מכילה יותר מ-k וקטורים.	תלויה לינארית
בסיס	קבוצה בת"ל מקסימלית	יער פורש	המשלים של יער פורש.	$= k$ " "	שאינה ניתנת להרחבה.	בסיס (כמו בלינארית...)
מעגל	קבוצה תלויה מינימלית*	מעגל פשוט.	מינימלי מ"ש חתך מינימלי.	$= k+1$ " "	כל הישרים, וכל השלשות שלא על ישר. כמו יום! סה"כ $\binom{7}{3}$ שלשות	קבוצה בת"ל + קומבינציה לינארית של כל וקטורי המישור. (חשוב לעמוד על זה!)

*כל איבר שנוסיף - יהפוך אותה לבת"ל.

מינימלית במובן של הכלה.

היא לא ניתנת באותו גודל

מעגל / girth - גודל המעגל המינימלי בגרף/מטרואיד

תרגיל: F_7 אינו גרפי.

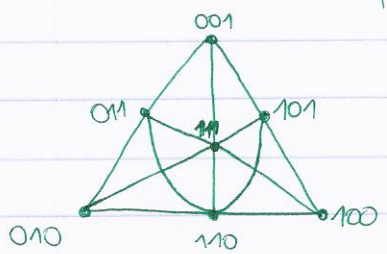
$\#$ דרכים 3. $\#$ הצרף (שם קיים) קשיר. כי

לכן יש בו 4 קודקודים. תזכר פשוט כי "מעגל מינימלי" הוא בגודל 3.

אלך ב- F_7 שמתאר איברים. סתירה.

לכן יש לנו לכל הותר 6 בלבול: ← ☒ F_7 לפ"ש,

מטרואיד לינארי - מטרואיד שיש לו הצגה כמטרואיד וקטורי (מעל שדה כלשהו).



F_7 הוא מטרואיד לינארי!

כל לבדוק שכל שלשה תלוי לינארית

אלא כל שני וקטורים/שאר שלשה ישר הם בת"ל,

וכאלו שכל קבוצה מגודל 4 ומעלה היא תל"ל.

$\{001\}^3(GF_2)$ ← להיו המטרואיד הוקטורי של Fano אלינו.

טענה: מטרואיד מחזה ע"י רשימת המעגלים שלו באופן יחיד, כי: הקבוצות הבת"ל הן בדיוק כל הקבוצות שאינן מכילות מעגל. (הוכחה I מחברת תרגילים)

עקרון הדואליות

טיפ: משפט שניתן להוכיח למאפיין שניתן להוכיח במישור קלמס:

13/05/15

שע' 4

אקסיומת ההחלפה

תהי E קבוצה סופית ו- C משפחת תת קבוצות.
C היא קבוצת המעגלים של מטרואיד $\Leftrightarrow$ מתקיימות שלוש האקסיומות:

C_0 - $\emptyset$ אינה מעגל (כדי שאגיע ל- I)

C_1 - עבור שני מעגלים $C_1, C_2 \in C$: $C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \not\subseteq C_2$ (אם C_2 מעגל, הרי שאי אפשר שגם C_1 מעגל)

C_2 - יהיו $C_1 \neq C_2$ שני מעגלים $C_1, C_2 \in C$: $\Rightarrow$ עבור $x \in C_1 \cap C_2$ קיים $C_3 \in C$ כך ש- $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$

(באופן שקול - הסיפא אומר לקבוצה כלשהי שני מעגלים... ומהיכן הסתלמת ההפוכה).

הוכחה:

$\Leftarrow$ נראה שקבוצת המעגלים מהמטרואיד מקיימת C_0, C_1, C_2. (C_0 ברור).

הוכחת C_2: יהיו C_1, C_2, x כאמור, ויהי $B \in C_1 \setminus C_2$ (יש כזה כי אקסיומת C_1 הוכחה).
נבנית הפונקציה $f(x) = (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ (עבור $x \neq y$ כלשהו, כי $x \in C_1 \cap C_2$) שהיא מאפסת $\equiv$ בעלת תלות.

נגדיר $A = C_1 \setminus \{y\}$. $A \ni x$ כמובן.
$|C_1| - 1 = |A| < |B| = |C_1| - 1$ שהרי A בלתי C_1 מעגל. שמעל A, ובפרט שאפשר להגדיר
אבר B - A, לפחות אחד קבוצה בלתי. שאפשר להוסיף עד שנקבל ישתו (A שזה ושוב...)
אל קבלנו A' כך ש- $|A'| = |B|$ אל $A' = f(C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$ אבור z כלשהו.
אם $y = z$ אל $A' \supseteq C_2$ וזו סתירה (מעגל בקבוצה בלתי).
אם $y \neq z \Rightarrow A' \supseteq C_1$ (כי התלות של y נשברה ל- z לאחר ש- A'), ושוב סתירה.
$\Rightarrow C_2$.

$\Rightarrow$: יהיו (E, C) כך שאקסיומות C_0, C_1, C_2.
נגדיר את קבוצת הקבוצות שאין מכילות אחרת מ- C } $= I$. נראה ש- (E, I) מקיים A_0, A_1, A_2.
לפי C_0, מתקיים A_0. A_1 נובע מהתגדרה (אופן של הקבוצות שלא מכילות אחת... אינטואיטיבי).
נוכיח את A_2: יש $A, B \in I$, $|A| < |B|$, אך אין AB כך ש- A אינו מכילה מעגל (= בת).

בכל - קיים $x \in B \setminus A$ כך ש- $A \cup \{x\}$ אינה מכילה מעגל (= בת).
אחת הנקודות - השפה שבין $A \setminus B$ ל- $B \setminus A$. # אם $B \supseteq A$ סיימנו (נובע סתם אחר מ- B).
יהי $x \in B \setminus A$.
נגדיר $B' = B \cup \{x\}$. אם B' אינה מכילה מעגל, נגדיר
$B_1 = B'$. $|B| < |B'|$. והלם מסתיר. לה נפלא.
אם B' מכילה מעגל, יש בו מעגל זה $A \setminus B \ni y$ (כי ב- A אין מעגל.)
מסכים לעריכה אחת כך שפתרנו את המעגל האחד על ידי שנסיר (מהנחות השני) על C_2.

10/3/13

גא' 5

נשביר $B_1 = B' \setminus \{y\}$ $|B| = |B'| > |A|$. בכל מקרה $|B_1| > |A|$.

יכין הלאה. בכל הצעד אנחנו שומרים על B_i חסרת מעגלים.

נמשיך עד שנגיע ל-B_n חסרת מעגלים, כך ש- $A \subseteq B_n$. ועכשיו $|A| < |B_n|$.

~~נוכיח~~ נוכיח ש-B_n הוא בסיס של A ומ"מ. $A_2 \leftarrow C_0, C_1, C_2 \boxtimes$

#הגדרנו מטרואיד באמצעות I - הקבוצות הבלתי, ו-C, קבוצת המעגלים.

אפשר באופן שווה להגדיר מטרואיד באמצעות קבוצת הבסיסים שלו.

$\{$כל תת הקבוצות של הבסיסים$\} = I$:*

אקסיומת הבסיס: יהי B אוסף תת הקבוצות של E סופית.

B הוא אוסף הבסיסים של מטרואיד.

b_0 - $B \neq \phi$ (הגדרנו בסיס, אפשר באופן כללי).

b_1 - אקסיומת ההחלפה - יהיו $B_1, B_2 \subseteq B$, אז:

$\forall x \in B_1 \setminus B_2$ קיים $y \in B_2 \setminus B_1$ כך ש- $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in B$ *

נוכיח. לפי מאמר את תורת הגרפים (כמעט).

הוכחה: $\Rightarrow$: יהי B אוסף הבסיסים של מטרואיד (E, I). נוכיח b_0, b_1.

b_0 ברור מ-A_0. נוכיח את b_1. יהיו $B_1, B_2 \in B$ בסיסים.

יהי $x \in B_2 \setminus B_1$. $|B_1| < |B_2|$ ומ-A_2 נובע קיומו של y ~~ה~~ הדרוש.

$x \neq y$ כי $x \notin B_2$.

$\Leftarrow$: תהי B קבוצה המקיימת את b_0, b_1.

נשביר I - אוסף תת הקבוצות של איברי B. אז (E, I) מטרואיד. A_0, A_1 ברורים.

הוכחת A_2 : יהיו X, Y שני תת הקבוצות של E.

בע"ש: קיים $x \in X \setminus Y$ כך ש- $B_3 \supseteq \{y\} \cup X$, איבר של B. (נניח $I \ni B_3$)

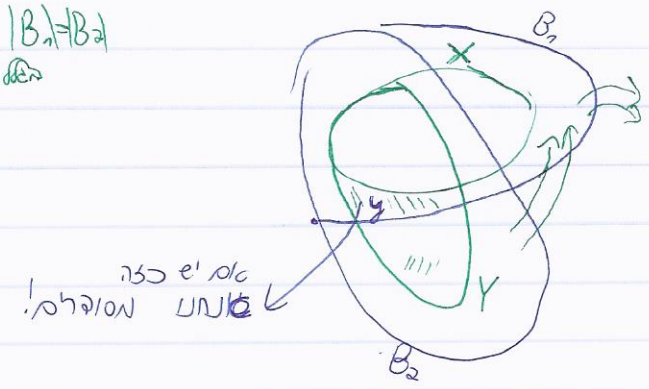
$B_1 \subseteq X$, $B_2 \supseteq y$ מאחר $B_1, B_2 \in B$ קיימים, כך ש- $|X| < |Y|$

~~לכל מקרה~~ $\forall x \in B_1 \setminus B_2$ קיים $y \in B_2 \setminus B_1$ כך ש- $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in B$

10/3/13

עמ' 9

$|B_1|=|B_2|$ בשפה יפה.



~~אחרת, $B_1 \cup B_2 \supseteq X \setminus Y$ (בפתרון הדפוסה בבית ספר השגיעה של שאלה.~~

~~אם $\emptyset \neq B_1 \cup (X \setminus Y)$ נקח $y \in (X \setminus Y)$ ו"מ.~~

- אם $\emptyset \neq B_1 \cup (X \setminus Y)$ נקח $y \in (X \setminus Y)$ ו"מ.

אחרת, $\emptyset = B_1 \cup (X \setminus Y)$.

אבחנה 1:
$$|B_1| = |B_2| \Rightarrow |B_2 \setminus B_1| = |B_2 \setminus B_1|$$

אבחנה 2: $X \setminus Y \subseteq B_2 \setminus B_1$

אבחנה 3:
$$|X| < |Y| \Rightarrow |Y \setminus X| < |X \setminus Y|$$

$$(*) \quad |X \setminus (B_2 \setminus B_1)| < |(B_2 \setminus B_1) \setminus X| \quad \text{(להוכיח...)}$$

הוכחה:
נסמן $x \in X \setminus (B_2 \setminus B_1)$ קיים $y \in B_2 \setminus B_1$ כך ש- $y \notin B_1 \cup (X \setminus B_1)$ הוא מסיים.

- אם $x \setminus Y \neq y$ ו"מ.
- אם $x \setminus Y = y$ (אז y בהכרח היחידי ש $y \in B_2 \setminus B_1$) נתקן את B_1 ל- $B_1 \cup \{y\}$.

מכיוון ש- $(*)$, יש יותר x מ-y. אם נמשיך כך שיישארו ה-xים, מתישהו $X \setminus (B_2 \setminus B_1)$ יגיע ל"גודל" של $X \setminus Y$. במקום: $(B_2 \setminus B_1) \setminus X$ "יגמר" קודם.

$\Leftarrow$ המקרים או המצוות נקח $X \setminus Y$ כפי שרצינו

$\boxtimes$ שקיבלנו אבסורד.