23/4/14

שיעור שבוע 9

תזכורת: אנחנו מתעסקים בשיטת המקדמים הלא ידועים. נתונה לנו משוואה מסדר n עם מקדמים קבועים $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=e^{\mu t}f(t)$. כלומר יש לנו מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים שהיא לא הומוגנית, ושווה לקוואזי פולינום.

אז כעת נראה ~~[illegible]~~ שיטה למציאת פתרון פרטי למשוואה, ואז נפתור המשוואה ההומוגנית וכך נפתור המד"ר כולה.

אז נזכור $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$ הפולינום האופייני. נניח הוא מתפרק $p=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_n)^{m_n}$

אז **למשפט:** יש שני מקרים

א) $p(\mu)\neq 0$ כלומר $\lambda_i\neq\mu$ לכל i. ובמקרה זה אפשר למצוא פתרון (פרטי) למד"ר הלא הומוגנית והוא מהצורה $x(t)=e^{\mu t}(Q(t))$ כאשר

$$\deg Q=\deg f$$

ב) $p(\mu)=0$ כלומר בה"כ $\lambda_1=\mu$ אז קיים פתרון (פרטי) למד"ר הלא הומוגנית מהצורה $x(t)=t^{m_1}e^{\mu t}Q(t)$ כאשר $\deg Q=\deg f$

הערה: כזכור הגדרנו $V_{\mu,d}$ להיות מרחב כל הקוואזי פולינומים מהצורה $e^{\mu t}\cdot Q(t)$ כאשר Q ממעלה לכל היותר $d-1$. כלומר מרחב הקוואזי פולינומים ממעלה $d-1$. $\dim V_{\mu,d}=d$ כמרחב וקטורי מעל

ראינו בעבר שמרחב הפתרונות למשוואה ההומוגנית הוא מהצורה $V_{\lambda_1,m_1}\oplus V_{\lambda_2,m_2}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_k,m_k}$ כלומר סכום ישר של קוואזי פולינומים כאלה.

כזכור הגדרנו אופרטור דיפרנציאלי $(D-\lambda)(f)=(\dot f-\lambda f)$. איך האופרטור הזה פועל על קוואזי פולינומים? $(D-\lambda)e^{\mu t}Q(t)=\mu e^{\mu t}Q(t)+e^{\mu t}\dot Q(t)-\lambda e^{\mu t}Q(t)$

כלומר **לסיכום:** $=e^{\mu t}\dot Q(t)+(\mu-\lambda)e^{\mu t}Q(t)$ ולכן מעלת הקוואזי פולינום יכולה רק לרדת ולא לעלות, והיא יורדת אמ"מ $\lambda=\mu$.

כלומר $(D-\lambda)$ מעביר קוואזי פולינום לקוואזי פולינום של אותה המעלה בדיוק אם $\mu\neq\lambda$ או של מעלה אחת פחות אם $\mu=\lambda$

למה: יהי $(D-\lambda):V_{\mu,m}\to V_{\mu,m}$ ואם $\lambda\neq\mu$ אז זה איזומורפיזם ואם $\mu=\lambda$ אז $D-\lambda$ בעל גרעין חד-מימדי; התמונה היא בדיוק $V_{\mu,m-1}$

הכל נעשה מעל המרוכבים

מבלי להיות שעלה המשוואה מעלה מ"ר... כלומר רק פתרון הומוגני או רק פתרון המשוואה

נוכיח בשיעור הבא. עוד זה הוכחה

23/4/14

המשך שיעור 9

<u>הערה חשובה:</u> נבחר בסיס $\{e^{\mu t}, te^{\mu t},\dots,t^{m-1}e^{\mu t}\}$ למרחב $V_{\mu,m}$. אז מהי המטריצה המייצגת של $D-\lambda$ לפי הבסיס הנבחר? כלומר איך האופרטור פועל על הבסיס?

⊝ אם $\mu\neq\lambda$:

$$e^{\mu t}\cdot t^k \xmapsto{D-\lambda} e^{\mu t}((\mu-\lambda)t^k+kt^{k-1})$$

ולכן המטריצה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} \mu-\lambda & 1 & & & \\ 0 & \mu-\lambda & 2 & & \\ \vdots & & \mu-\lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & m-1 \\ 0 & & & & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

זו מטריצה משולשת עליונה, ו- $\mu-\lambda\neq 0$ לכן המטריצה הפיכה ולכן זה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.
זו למעשה מטריצה מייצגת של $D-\lambda$ לפי הבסיס שבחרנו, על איברי הבסיס.

⊝ אם $\mu=\lambda$ אז מתקיים $(D-\lambda)(e^{\mu t}t^k)=e^{\lambda t}\cdot k\cdot t^{k-1}$ ולכן זו פעולה נילפוטנטית!

והמטריצה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & 2 & & \\ & & \ddots & 3 & \\ & & & \ddots & m-1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

לכן זו מטריצה לא הפיכה, הגרעין שלה חד ממדי, והיא נילפוטנטית עם m-המעלה המקסימלית.
[כי בדרגה $m-1$ כמובן]

צורה קנונית בז'ורדן. אפשר לקבל כל איבר מתחת הצבה, מהמטריצה הפשוטה של המטריצה

<u>כעת נחזור לשאלה:</u> כבר הגדרנו שלנו, המד"ר, היא למעשה $p(D)=e^{\mu t}P(t)$ אז נתחיל בפתרון במונחים כאלה. ולכן נפתור המד"ר $(D-\lambda)^m x=e^{\mu t}P(t)$.

סימון: $\deg P=d-1$

⊝ אם $\mu\neq\lambda$, אז מתקיים $(D-\lambda)^m: V_{\mu,d}\to V_{\mu,d}$ איזומורפיזם כהרכבת איזומורפיזמים לפי הערה. לכן זה חח"ע ועל, לכן <u>קיים ויחיד</u> איבר $x\in V_{\mu,d}$ כך ש $(D-\lambda)^m x=\varphi$ לכל φ תחום פולינום ב $V_{\mu,d}$ ובפרט עבור $\varphi=e^{\mu t}P(t)$. ולכן קיים פתרון שהוא תחום פולינום במעלה שלו, כנדרש. לכן $x=e^{\mu t}Q(t)$ כאשר $\deg Q=\deg P$ כי ראינו שהאופרטור הזה שומר דרגה!

⊝ אם $\mu=\lambda$. נרצה לפתור את $(D-\lambda)x=e^{\mu t}P(t)$. עדיין $e^{\mu t}P(t)\in V_{\mu,d}$ אבל $(D-\lambda)^m$ <u>לא</u> על $V_{\mu,d}$! ולכן אין סיכוי למצוא פתרון מתוך $V_{\mu,d}$. אבל כאמור $V_{\mu,d}\subseteq V_{\mu,d+m}$ ולכן מתקיים: $(D-\mu)^m: V_{\mu,d+m}\twoheadrightarrow V_{\mu,d}$ כאשר הוא על. לכן קיים פתרון למד"ר, $x\in V_{\mu,d+m}$ כך ש $(D-\lambda)^m x=e^{\mu t}P(t)$ כנדרש. לכן x תחום פולינום מדרגה $d+m-1$. לכן $x=e^{\lambda t}(q_0+q_1t+\dots+q_m t^m+\dots+q_{d+m-1}t^{d+m-1})$. ולכן

$$x=\underbrace{e^{\lambda t}(q_0+\dots+q_{m-1}t^{m-1})}_{\text{זה פתרון למשוואה ההומוגנית}}+t^m e^{\lambda t}(q_m+\dots+q_{d+m-1})$$

ולכן אפשר לצרוך את החלק הזה...

23/4/14

המשך שיעור 9

אז נבדוק את הצבת הפולינום ב-x ונקבל $\tilde{x}(t)=e^{\mu t}t^m(q_m+\dots+t^{d-1}q_{d+m-1})$ ולכן מצאנו!
פתרון למשוואה $(D-\lambda)^m x=e^{\mu t}P(t)$ מהצורה $e^{\mu t}t^m\cdot Q(t)$! $\deg Q=\deg P$
[$\tilde{x}$! x נבדלים על כפי פולינום בגרעין של $(D-\lambda)^m$ ולכן זה לא משנה]

פשוט נבצע את x את הצבת הפולינום שלו. זה לא יאריך נוכל לפתור את המשוואה הזאת המוצגת כאמור אנחנו רק מחפשים פתרון פרטי

סה"כ: פתרון עבור מונומים הפכים $(D-\lambda)^m x=e^{\mu t}P(t)$. נרצה גם לפולינומים כללים.

כפיתור הסדר לא חשוב. זה קומוטטיבי להרכבה

נרצה לפתור את $p(D)=(D-\lambda_k)^{m_k}\circ\dots\circ(D-\lambda_1)^{m_1}x=e^{\mu t}P(t)$

~~$\deg P_k(t)=\deg P(t)$ כאשר $x_k=e^{\mu t}P_k(t)$ אז~~ ⊖ אם $\mu\neq\lambda_i$:

נתבונן ב $V_{\mu,d}$ כאשר $d-1$ דרגת P. אז $(D-\lambda_i)^{m_i}$ הוא איזומורפיזם על $V_{\mu,d}$ ולכן גם ההרכבה שלהם. לכן $p(D)=(D-\lambda_k)^{m_k}\circ\dots\circ(D-\lambda_1)^{m_1}$ הוא איזומורפיזם של $V_{\mu,d}$ על עצמו ולכן יש פתרון בצורה שרצינו קודם. גם הפתרון יחיד, והוא במרחב $V_{\mu,d}$, והפתרון הזה אותה דרגה כמו P.

⊖ אם μ שווה לאחד מהם, בה"כ $\lambda_1=\mu$. אז נסדר את $p(D)$ רק ש $p(D)=(D-\lambda_k)^{m_k}\circ\dots\circ(D-\lambda_1)^{m_1}$. ונרצה לפתור את המשוואה $p(D)x=e^{\mu t}P(t)$
נסמן $y=(D-\lambda_1)^{m_1}x$ ונפתור את $(D-\lambda_k)^{m_k}\circ\dots\circ(D-\lambda_2)^{m_2}y=e^{\mu t}P(t)$
לפי השלב הראשון קיים פתרון y למשוואה, רק ש $y=e^{\mu t}Q(t)$ כאשר $\deg Q=d-1$.

כי השורשים שונים.

לכן כעת נותר לנו לפתור את $(D-\lambda_1)^{m_1}x=e^{\mu t}Q(t)$. וכיסינו כבר במקרה זה, $\lambda_1=\mu$, לכן יש פתרון מהצורה $e^{\mu t}t^{m_1}\cdot H(t)$ כאשר מעלת H היא $d-1$. וכאן סיימנו ההוכחה, כנדרש.

דוגמא חשובה: משוואת אוילר: $t^n x^{(n)}+a_1t^{n-1}x^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}\cdot t\dot{x}+a_nx=0$

דוגמא למשוואה עם מקדמים לא קבועים שאותה נדע לפתור

לא מעניין ב $t=0$, כי נקודה סינגולרית, לכן מעניין תמיד או ב $t<0$ או $t>0$ או ב-t לא מכסים אפס. אנחנו נעבוד תמיד ב $t>0$.
אוילר גילה שניתן להגיע למקדמים קבועים, לא תלויים ב-t, ע"י החלפה t תופס τ! כאשר $t=e^\tau$ זה מתאים עם הדרישה $t\neq0$. לכן לכל x פונ' של t נגדיר פונ' של τ לפי $y(\tau)=x(e^\tau)=x(t)$

אז נוכל לפתור המד"ר

מסקנה: אם x מקיימת המד"ר אוילר אז $y(\tau)$ מקיימת מד"ר ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים.

23/4/14

המשך שיעור 9

<u>מסקנה:</u> כדי לפתור המשוואה עם המקדמים הלא קבועים, נפתור המשוואה עם המקדמים הקבועים עבור y נציג את y כסכום של קוואזי פולינומים ואז נחליף חזרה את τ ל t ע"י $\tau=\log t$.

ואז קוואזי פולינום $e^{\lambda\tau}P(\tau)$ יהפוך ל $t^{\lambda}P(\log t)$

<u>הוכחה שלמה אחרת:</u>

אם נסמן $y(\tau)=x(e^{t})$ כאשר $t=e^{\tau}$ אז $\frac{dt}{d\tau}=t$ ולכן

$\boxed{\text{פשוט כלל השרשרת וגזירות לפי } \tau!}$

$$\frac{dy}{d\tau}=\dot{x}\cdot t \quad ; \quad \frac{d^2y}{d\tau^2}=\ddot{x}\cdot t^2+\dot{x}t \quad ; \quad y'''=\dddot{x}\cdot t^3+\ddot{x}\cdot 2t^2+\ddot{x}t^2+\dot{x}t$$

אז באינדוקציה קל לראות שמתקיים

$$y^{(k)}=x^{(k)}t^k+\sum_{s=1}^{k-1}b_s x^{(s)}t^s$$

עבור $b_s\in\mathbb{R}$.

ולכן יש קשר לינארי פשוט:

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ b_1 & \cdots & b_{k-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}t \\ \ddot{x}t^2 \\ \vdots \\ x^{(k)}t^k \end{pmatrix}$$

הנתון ע"י מטריצה משולשת תחתונה, הפיכה. ולכן ניתן להציג את הביטויים

$$\{\dot{x}t,\ddot{x}t^2,\dots,x^{(k)}t^k\}$$

במפורש $\{y',y'',\dots,y^{(k)}\}$ ונקבל את המשוואה כעת של y עם מקדמים קבועים כי העלמנו את ה t^j מהמקדמים במשוואה המקורית. כלומר נהפוך המטריצה ונקבל ביטוי לינארי ב $\{y',\dots,y^{(k)}\}$ עבור $x^{(j)}t^j$.

לכן $y(\tau)$ מקיים משוואה עם מקדמים קבועים. מהו הפולינום האופייני של משוואה זו? אם נזכור הפולינום האופייני שמקבל מהצבת $e^{\lambda\tau}$ במשוואה, כלומר להציב $e^{\lambda\tau}=t^{\lambda}$. לכן הפולינום האופייני מקבל אם נציב למשוואת אוילר המקורית את הפונ' t^{λ} ואכן: מהצבה במשוואה נקבל

$$t^{\lambda}(\underbrace{\lambda(\lambda-1)\dots+a_1\lambda(\lambda-1)\dots+\dots+a_n}_{\text{וזה הפולינום האופייני עבור המשוואה של } y.})$$

$\boxed{\text{זה הפולינום שקיבלנו לאחר הצבת } t^{\lambda} \text{ במשוואה המקורית}}$

<u>דוגמא:</u>

$\ddot{x}+\frac{1}{4t^2}x=0$, זו משוואת אוילר מהצורה $4t^2\ddot{x}+x=0$.

אז אפשר לעשות את החלפת משתנים ל τ, לפתור ולהפוך מחדש

ונקבל משוואה $4(y''-y')+y=0$ ואז הפולינום האופייני $4\lambda^2-4\lambda+1=0$.

אבל אפשר להשתמש בדרך של להציב t^{λ} במשוואה המקורית ונקבל

$$4t^2(\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2})+t^2=t^2(4\lambda^2-4\lambda+1)$$

אז הפולינום המתקבל

23/4/14

המשך שיעור 9

המשך דוגמא:

אם $p(\lambda) = (2\lambda-1)^2$. אז כאמור עבור t מקיימת משוואה עם מקדמים קבועים

שונים y. אז $e^{\frac{1}{2}t}, te^{\frac{1}{2}t}$ פתרונות בסיסיים עבור המשו' y. ולכן

$\sqrt{t}, \log t\sqrt{t}$ הפתרונות הבסיסיים עבור x, והמשוואה המקורית.

סדרות המוגדרות ע"י כלל נסיגה לינארי:

⊙ כלל נסיגה לינארי הוא מהצורה $x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n$

שמגדיר סדרת מספרים $\{x_n\}$. כאשר k קבוע ו- $a_i \in \mathbb{R}$

הערה: ⊙ אם נתונים לנו k האיברים הראשונים, נרצה שמהם נוכל לחשב את הסדרה.

כלומר כדי לקבוע את הסדרה ביחידות מספיק את $x_0,\dots,x_k$

תנאי התחלה וכלל הנסיגה. [אם קיים ויחידות כמו זה כאחד, לפתרון]

המשמעות נוסחאות נסיגה זה כמו מד"ר לינאריות מסדר גבוה

דוגמא:
סדרת פיבונאצ'י
$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$
תנאי התחלה:
$x_1 = 1$; $x_0 = 0$
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 וכו'...

⊖ מקיים שמימד כל הסדרות הללו V הוא k מימדי.

⊖ מהו משפט אבל-ליוביל ומהו W במקרה הזה?

נסיון פתרון:

נסה $x_n = \lambda^n$; נציב ונקבל

$$\lambda^{n+k} = a_1\lambda^{n+k-1} + \dots + a_k\lambda^n \;/\lambda^n$$

$$\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k$$

סדרה היא פתרון אם היא מקיימת את הפולינום האופייני

וקיבלנו את המשוואה האופיינית של הסדרה, שבה למעשה פולינום אופייני. כל איבר בסדרה מקיים את זה.

נניח $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הם שורשים שונים אז נקבל k סדרות שונות שנתונות ע"י $x_i^n = \lambda_i^n$, ואלה הם בסיס ל-V ולכן כל פתרון הוא צירוף לינארי שלהם, עם מקדמים קבועים.

אינטואיציה:
נניח λ_1 ו-λ_2 שני פתרונות שונים, ונניח הם מאוד קרובים. כאמור λ_1^n, λ_2^n שתי סדרות חוקיות אז גם $\lambda_1^n - \lambda_2^n$ סדרה שלמה: $\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ואז $\lambda_1 \to \lambda_2$ וזה נגזרת...

⊖ אם שורש מסוים הוא מריבוי גדול, נגיד m. נניח בה"כ זה λ_1 אזי הסדרות שהם חלק מהבסיס הם $\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{m-1}\lambda_1^n$, כלומר m פתרונות שונים.

עבור פיבונאצ'י: $\lambda^2 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ולכן כל פתרון הוא מהצורה $C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ והקבועים מוגדרים לפי תנאי ההתחלה.

נחלק ב $\lambda_1-\lambda_2$ כדי לקבל סדר גודל.
זה גם פתרון!

24/4/14

המשך שיעור 9

<u>דוגמא נוספת:</u> $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$. זה כלל עומק נסיגה 2. הפולינום האופייני הוא $\lambda^2+2\lambda+1$ ולכן $\lambda_1=\lambda_2=-1$; לכן הפתרון הראשון יהיה $x_1^{(n)}=(-1)^n$ והשני יהיה $x_2^{(n)}=n(-1)^n$. כל פתרון אחר יהיה צירוף ליניארי קבוע שלהם.

זה תואם מאוד פורמלי למד"ר, אבל פשוט יותר

<u>הערה:</u> הפולינום המתואר זה הפולינום האופייני של המטריצה שכופלת כל פעם וקטור את הסדרה בצעד אחד. במקום כלל הנסיגה הליניארי הנ"ל, נסתכל במטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} x_{n+k} \\ x_{n+k-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כאן קיבלנו כלל נסיגה על וקטורים. אם שהוצרכנו לתנאי התחלה, לכן צריך k תנאי התחלה, שזה וקטור.

עכשיו כי x_0 וקטור תנאי התחלה אז $x_{n+1}=A^{n+1}x_0$ וזה נוסחה סגורה לסדרה.

<u>הערה:</u> עד עכשיו טיפלנו במשוואה מסדר n, ליניארית יחידה. כעת נעבור למערכת משוואות ליניאריות מסדר גבוה. ונראה שמשוואה יחידה זה מקרה פרטי של מערכת משוואות.

<u>מערכת משוואות ליניאריות:</u>

נתון לנו וקטור $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ של פונקציות ונתונה משוואה $\dot{x}=A(t)x+b(t)$ כאשר $A(t)$ מטריצה מקדמים שתלויה בt. נניח ש A_{ij} פונקציות רציפות בt. בנוסף וקטור b, החלק הלא הומוגני של המשוואה, כך ש $b(t)$ פונקציה רציפה בt. כמובן $\vec{b}(t)=(b_1(t),\dots,b_n(t))$.

- כפי שאנו כבר מכירים משפט קיום ויחידות. וכל תנאי התחלה הוא למעשה וקטור בעל n ערכים, שהם ערכי כל רכיבי $\vec{x}$ על נקודת ההתחלה.
- בנוסף את הפתרון הנ"ל ניתן להרחיב לכל הקטע (a,b) כפי שראינו בעבר.
- לכן המערכת משוואות (מסדר 1) זה כללי יותר מאשר לדון במשוואה אחת מסדר גבוה, כי כל משוואה מסדר n אפשר להפוך למערכת של n משוואות ליניאריות מסדר 1.

למעשה כל מה שאמרנו על משוואה מסדר גבוה יהיה נכון עבור פתרון שלו על מערכת משוואות

כי אם $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_n(t)=f(t)$ משוואה מסדר גבוהה נעבור למערכת וקטורית. נגדיר משתנה $\vec{x}(t)=(x(t),\dot{x}(t),\dots,x^{(n-1)}(t))$ ואז נקבל המערכת המתאימה

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & \cdots & -a_n & 1 \end{pmatrix}\vec{x}+(0,\dots,0,f(t))$$

24/4/14

המשך שיעור 9

(+) המטריצה שמתאימה את המערכת במקרה זה היא מאוד ספציפית, וקל למצוא אותה.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

תרגיל: למצוא הפולינום האופייני של המטריצה הזו

הערה: הריבוי הגאומטרי של כל ע"ע של מטריצה זו הוא 1.
כלומר כמות הו"ע של כל ע"ע היא 1.

24/4/14

תרגול שבוע 9

שאלה משיעורי הבית:

מצא קטע שבו הפתרון למד"ר מוגדר $x(0)=0$; $\dot{x} = t+x^2$.

אם משפט קיום ויחידות אפשר למצוא קטע סביב הנקודה שבו יש פתרון, ואז הקטע מוצאים ע"י התחום שבו הוא ליפשיצית.

(-) באופן יותר יפה בעצם משפט ההשוואה עם $\dot{x}=x^2$ חוסם מלמטה, וע"י ההגבלה של $t\le 1$ אפשר לחסום מלמעלה ע"י $\dot{x}=1+x^2$ ולקבל תחום שבו הפתרון מוגדר, וחסום.

מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים: [לינארית]

נתונה: $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_n=0$ כאשר $a_i\in\mathbb{R}$ קבועים. ע"י ניחוש פתרון $e^{\lambda t}$ והצבה נקבל הפולינום האופייני, ששורשיו הם הפתרונות הבסיסיים למרחב הפתרונות. כלומר, הפולינום האופייני יוצא $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$ ושורשיו מספיקים את כל מרחב הפתרונות כפי שראינו בהרצאה.

לשורשי הפולינום האופייני נקרא ע"ע, ונסמן בk את הריבוי האלגברי שלו. אז המרחב $\{e^{\lambda t}\cdot Q(t) \mid \deg Q=k-1\}=V_{\lambda,k}$ הוא פתרונות למד"ר, והוא המרחב הפתרונות שמתאימים לע"ע λ, וזה מרחב ממימד k.

(-) אם λ מרוכב אז נקבל שני פתרונות ממשיים, למשל כסינוס וקוסינוס. כלומר לכל שורש מרוכב λ יהיה לו מרחב במימד פי שניים ממה שצפוי, אבל זה עם הצמוד ששניהם ע"ע גם הפולינום ממשי אז זה מספר ממשי מימד.

אופרטור הגזירה: $D=\frac{\partial}{\partial t}$ זה אופרטור שמקבל פונ' ומחזיר את הנגזרת שלה לפי t. כמו כן I זה אופרטור הזהות של פונ' בt.

24/4/14

המשך תרגול 9

⊖ בהינתן פולינום p כלשהו: $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_0=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$, אז נוכל את
הנ"ל פולינום אופייני של מד"ר כלשהו, אז לשחזר המד"ר כיוון מה שראינו בדרכים לשמאל.
זה הפולינום של D. כלומר: $p(D)y=(D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_nI)y=(D-\lambda_1)^{m_1}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}y$
לכן פתרונות למד"ר ההומוגנית זה בדיוק הגרעין של ההעתקה הלינארית $p(D)$, וזה
כמו הגרעינים של $(D-\lambda_jI)^{m_j}$ לכל j.

וראינו כי $(D-\lambda_jI)^{m_j}y=0 \leftrightarrow y\in V_{\lambda_j,m_j}$ וזה אופן שלם
לפתרונות למד"ר ההומוגנית.

תרגיל:
$\ddot y+3\dot y-4y=0$; אז הפולינום $\lambda^2+3\lambda-4=(\lambda+4)(\lambda-1)$
לכן $\lambda=-4,1$ לכן הפתרונות היסודיים הם e^{-4t},e^{t} לכן כל פתרון אחר
יהיה צירוף שלהם במקדמים קבועים.

תרגיל: $\ddot y+6\dot y+9y=0$. אז $p(\lambda)=(\lambda+3)^2$ לכן יש שורש מריבוי 2. לכן
הפתרונות היסודיים הם e^{-3t}, te^{-3t} וכל השאר הם צירוף שלהם.

תרגיל: $\ddot y+10\dot y+29y=0$. אז $\lambda_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot29}}{2}$; $\lambda_{1,2}=-5\pm2i$
אז יש לנו שני שורשים מרוכבים צמודים. לכן פתרון כללי יהיה
$x=e^{-5t}(C_1\cdot\cos2t+C_2\cdot\sin2t)$; כלומר $\sin2t,\cos2t$ פורשים במקרה המרוכב, את הפתרונות
הממשיים. אם רוצים לפרוש הפתרונות המרוכבים אפשר לקחת את $e^{\lambda_1t},e^{\lambda_2t}$.

תרגיל: $y^{(5)}-3y^{(4)}+2y^{(3)}-6\ddot y-3y=0$ אז הפולינום הוא $\lambda^5-3\lambda^4+2\lambda^3-6\lambda^2-3\lambda$.
ננחש שורשים ע"י מחלקים של -3. ואכן 3 הוא שורש. נחלק ב $\lambda-3$ ונקבל
$(\lambda-3)(\lambda^2+1)^2$. לכן הפתרונות הם: עבור $\lambda=3$ נקבל פתרון e^{3t}.
עבור $\lambda=\pm i$ הם מריבוי 2 ; לכן $\cos t, t\cos t$ שמקבלים מ i
! $\sin t, t\sin t$ שמקבלים מ $-i$.

תרגיל: נתון $p(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+5)^3$. מצאו פתרון ל $p(D)y=0$. אז שורשים הם
$\lambda_{1,2}=-1\pm2i$ וכל אחד מהם מריבוי 3 לכן הפתרונות הם: $e^{-t}\cos2t, te^{-t}\cos2t, t^2e^{-t}\cos2t$
! $e^{-t}\sin t, te^{-t}\sin t, t^2e^{-t}\sin t$.

בפתרון, אפשר לפתור המד"ר ההומוגנית כפי שראינו, ולמצוא פתרון פרטי במקרה (ריבוי של המקדמים)

<u>פתרון מד"ר לא הומוגנית לינארית עם מקדמים קבועים:</u>
נתונה משוואה $p(D)y=b(t)$. ונניח $b(t)$ הוא קוואזי-פולינום.
זה מקרה עלינו!

24/4/14

המשך תרגול 9

משפט: נניח μ האקספוננט של $b(t)$. אם μ שורש של $p(\lambda)$ אז נאמר שיש רזוננס.
נסמן s את הריבוי האלגברי של μ כשורש. אז פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית
יהיה $x \in t^{s} \cdot V_{\mu,k}$ כאשר k מעלת הפולינום ב $b(t)$

תרגיל: $y^{(4)}+2\ddot{y}+y=e^{2t}+\pi$

פתרון: $P(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2$ לכן $\lambda=\pm i$ ושניהם מריבוי 2.
כמו כן $e^{2t}\in V_{2,1}$ ו $\pi\in V_{0,1}$. גם 2 וגם 0 אינם שורשים של p לכן
אין רזוננס, לכן $s=0$ לכן פתרון פרטי למד"ר יהיה סכום של פתרון פרטי עבור e^{2t}
ופתרון פרטי עבור π. נבדוק למצוא פתרונות פרטיים ל

$$\begin{cases} P(D)y_1=e^{2t} \\ P(D)y_2=\pi \end{cases}.$$

אז $y_1\in V_{2,1}$ לכן $y_1=e^{2t}(C)$
ו $y_2\in V_{0,1}$ לכן $y_2=B$

נציב במשוואה ונמצא את C ו B ונקבל $B=\pi$; $C=\frac{1}{25}$.

פשוט מציבים במד"ר ומוצאים מה שצריך

הפתרונות ההומוגניים הם $t\sin t, t\cos t, \sin t, \cos t$ לכן פתרון כללי למד"ר יהיה

$$(C_1+C_2t)\sin t+(C_3+C_4t)\cos t+\frac{1}{25}e^{2t}+\pi$$

תרגיל: $\ddot{y}+y=\sin t$

פתרון: $\lambda^2+1=0$ אז $\lambda_{1,2}=\pm i$ לכן פתרונות עצמיים הם $\sin t, \cos t$. מצד שני
מתקיים $\sin t\in V_{i,1}$ לכן יש רזוננס.

הואיל והפתרון שצריך למצוא זה כמד"ר מרוכבת

נתבונן במד"ר המרוכבת $\ddot{z}+z=e^{it}$ ששקולה לשתי משוואות ממשיות, ע"י החלק
הממשי והחלק המדומה. החלק המדומה זה בדיוק המד"ר שלנו.

$Z=x+iy \longleftarrow$ אם z פתרון למשוואה המרוכבת אז y פתרון למד"ר הממשית
שלנו, שהוא החלק המדומה.

פתרון פרטי למד"ר המרוכבת יהיה מהצורה $a\cdot e^{it}$ והקבוע הוא $\frac{i}{2}$. לכן
$z_p=-\frac{1}{2}(ie^{it})\cdot t$ ורק נקח פתרון ע"י החלק המדומה.

רזוננס!