27/3/14

המשך תרגול 6

תרגיל: מצא מד"ר לינארית מסדר II עבורה $y_1=\sin x$; $y_2=e^x$ שני פתרונות יסודיים.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} \sin x & e^x & y \\ \cos x & e^x & \dot y \\ -\sin x & e^x & \ddot y \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \ddot y\left(e^x(\sin x-\cos x)\right)-\dot y\left(e^x(2\sin x)\right)+ye^x(\cos x+\sin x)=0$$

זוהי מד"ר לינארית מסדר 2 שאלו הפתרונות היסודיים שלה, כנדרש.

אם $\sin x$, e^x אכן פורשים את כל הפתרונות, לכן שלוש השורות הללו יהיו חייבות להיות תלויות לינארית ונקבל מד"ר לינארית מסדר 2 של y, כנדרש.

2/4/14

שיעור שבוע 7

תזכורת: בסוף שיעור שעבר פתרנו את משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=0$. והתאמנו למשוואה פולינום שקראנו לו פולינום אופייני $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$. וראינו כי $e^{\lambda t}$ פתרון למד"ר אמ"מ λ שורש של הפולינום p הנ"ל.

הערה: אם λ מספר מרוכב, כלומר $\lambda=\alpha\pm i\beta$ אז $e^{(\alpha\pm i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$. לכן הגזירה שלה נכונה גם עם λ מרוכב כי $(e^{\lambda t})'=\lambda e^{\lambda t}$.

תזכורת: המשפט היסודי של האלגברה אומר שכל פולינום עם מקדמים מרוכבים ניתן לפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$.
לכן: $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ שורשים שונים של הפולינום $p(\lambda)$; m_i נקראים הריבויים של השורש. [ריבויים אלגבריים של השורשים, בשונה מריבוי ג'יאומטרי...]

בשיעור שעבר ראינו מה קורה אם $p(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים שונים ב-$\mathbb{R}$ כלומר $p(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$, ובמקרה זה $\{e^{\lambda_i t}\}_{i=1}^{n}$ בסיס למרחב הפתרונות. כלומר פ"ל ופורשים את V. כלומר $\varphi_i=e^{\lambda_i t}$. לכן במקרה פשוט זה מתקיים שכל פתרון למשוואה x יהיה $x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ie^{\lambda_i t}$.

דוגמא: $\ddot x-3\dot x+2x=0$. אז הפולינום האופייני $p(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)$.
לכן: $\lambda_1=1 \rightarrow \varphi_1=e^t$; $\lambda_2=2 \rightarrow \varphi_2=e^{2t}$. לכן כל פתרון אחר יהיה $c_1e^t+c_2e^{2t}$.

2/4/14

[illegible] שיעור 7

מקרה שני: כאשר $p(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים שונים, אבל יש לו שורשים מרוכבים
כלומר לא כולם ב $\mathbb{R}$. אם המשוואה שלנו הייתה מרוכבת לא היה שום הבדל,
אנו הפכנו כמו שעשינו לממשיים היה עובד, עבור מקדמים מרוכבים וכו'.
כלומר $\varphi_i = e^{\lambda_i t}$ עדיין היה בסיס ל V, ואז הפתרונות המרוכבים של המד"ר
ואז כל פתרון מרוכב היה מהצורה $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$
$c_i \in \mathbb{C}$! אבל אנחנו מחפשים רק פתרונות ממשיים שלו מטרה.

אם כל מקדמי המשוואה $a_i \in \mathbb{R}$, נרצה לקבל פתרון ממשי, במקרה זה $p(\lambda)$ פולינום ב $\mathbb{R}[x]$, כלומר כל מקדמיו ממשיים.

כלומר אנחנו מחפשים פתרון ממשיים למשוואה שמקדמיה ממשיים

למה: אם p פולינום במקדמים ממשיים אז $\lambda = \alpha + i\beta$ שורש של p אמ"מ $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ שורש של p, ובנוסף יש להם אותו ריבוי אלגברי.

הוכחה השאירה כתרגיל...

שורש פשוט

לכל λ שורש (נגדיר) $\varphi(t) = e^{\lambda t}$. אם $\lambda = \alpha + i\beta$ אז $\varphi(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$
ולכן $\bar{\lambda}$ גם שורש ואז $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$
לכן! $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$ פתרונות למשוואה שלנו, אבל שניהם מרוכבים, לא ממשיים.

כל זה טריוויאלי...

אבל המשוואה לינארית, לכן במקום הפתרונות $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$ נגדיר פתרונות
$\psi_1 = \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} = \mathrm{Re}\,\varphi$ שהוא גם פתרון שלינארית! $\psi_2 = \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} = \mathrm{Im}\,\varphi$

ψ_1, ψ_2 ! פתרונות. כלומר מ n פונ' שהן היו מרוכבות עברנו ל n פונ'
ממשיות. המעבר מ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ל $\psi_1, \dots, \psi_n$ זה העתקה לינארית
הפיכה, לכן משום ש $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בלתי תלויים לינארית כבסיס לפתרונות
נקבל כי $\psi_1, \dots, \psi_n$ בת"ל לינארית! לכן בסיס, ואלו פונ' ממשיות.

זה היה בשיעורי בית

העברנו רק את הבסיס של הפתרונות המרוכבים לבסיס ממשיים את הפתרונות הממשיים השארנו כמו שהם

דוגמא: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ אז $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ לכן הפתרונות שלו הם $\pm i\omega$. אז $\varphi_1 = e^{i\omega t}$, $\varphi_2 = e^{-i\omega t}$.
כל פתרון למד"ר שהוא פונ' מרוכבת יהיה צירוף לינארי מרוכב של φ_1, φ_2.
כדי להשיג פתרונות ממשיים, נעבור לפונ' $\cos\omega t, \sin\omega t$ שהן החלק הממשי והמדומה, לכן כל פתרון ממשי יהיה צירוף של אלה.

2/4/14

המשך שיעור 7

(*) אם בוחרים פולינום באקראי לא יהיו לו שורשים עם ריבוי...

מקרה 3: מה אם p לא מתפרק לגורמים שונים? כלומר יש שורשים עם ריבוי.

דוגמא: $\ddot{x}+4x+4=0$; אז $p(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+4$ כלומר $p(\lambda)=(\lambda+2)^2$

לכן יש שורש יחיד מריבוי שניים. לכן $\varphi_1(t)=e^{-2t}$ עדיין פתרון, אבל

מצאנו רק אחד... לא ברור מאיפה נביא את השני. אפשר לעשות הורדת סדר למשוואה

$$W=\begin{vmatrix} e^{-2t} & x \\ -2e^{-2t} & \dot{x}\end{vmatrix} = \dot{x}e^{-2t}+2xe^{-2t} = e^{-4t}$$

נניח ש-x פתרון נוסף כלשהו...

ממשפט שהוכחנו על ורונסקיאן והמד"ר שהוא מקיים

אז נפתור את המד"ר הלינארית הלא הומוגנית הזו.

אז פתרון למשוואה ההומוגנית הוא e^{-2t} ונמצא פתרון לא הומוגני בשיטת וריאציית מקדמים ונקבל פתרון חדש te^{-2t}

טענה: אם $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ אז לכל λ_i נרשום m_i פונקציות $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t},\ldots,t^{m_i-1}e^{\lambda_i t}$ ובסה"כ נקבל $\sum_{i=1}^{k} m_i=n$ פונ'.

אז כל הפונ' הרשומות לעיל הן בת"ל לינארית ב-$\mathbb{C}$, וכולם פתרונות של המד"ר

לכן בסיס ל-V.

בנוסף אם במד"ר בעלת מקדמים ממשיים אז נשנה קצת את הפונ' כדי לקבל פתרונות ממשיים.

אם $\lambda_j\in\mathbb{R}$ ← $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t},\ldots,t^{m_j-1}e^{\lambda_j t}$

אם $\lambda_j=\alpha_j\pm i\beta_j$ ← אז גם $\alpha_j-i\beta_j$ שורש לפולינום האופייני

ובשניהם יחד $2m_j$ פונ' אבל כעת ממשיות, כמו קודם.

$$e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), \ldots, t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$$

דוגמא: $p(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+2)^2(\lambda-1)^2$ ← $p(\lambda)=(\lambda+1-i)^2(\lambda+1+i)^2(\lambda-1)^2$

לכן e^t, te^t פתרונות, לכן גם $e^{(-1-i)t}, te^{(-1-i)t}$ וגם! $e^{(-1+i)t}, te^{(-1+i)t}$

וכולם בת"ל, אבל חלקם מרוכבים... וזה בסיס למרחב הפתרונות מעל $\mathbb{C}$. אם נפריד את הפונ' המרוכבות לפונ' ממשיות ונקבל בסיס

$$e^t, te^t, e^t\cos t, e^t\sin t, te^t\cos t, te^t\sin t$$

⊖ נותר רק להוכיח הטענה... כלומר שאלו פתרונות ושהם בת"ל. ננסה להוכיח עם ורונסקיאן וזה סיוט, לכן נרצה לפתח שיטה חדשה לפתרון כזה. ונחזור להוכחה בעתיד...

2/4/14

המשד, שיעור 7

אופרטורים דיפרנציאליים עם מקדמים קבועים:

$D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ כאשר $D = \frac{d}{dt}$ כלומר $Df = \frac{df}{dt}$. נסמן D^n את ההרכבה של D עם עצמו n פעמים. כלומר D^n זה גזירה n פעמים.

אם $p = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ אז $p(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i D^i$ ומתקיים

$$p(D)(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^{(i)}.$$

כאשר $D^0 = I$ כלומר $D^0(f) = f$

⊝ את המשוואה שאנחנו מנסים לפתור שהיא $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$ נוכל לכתוב כמשוואה $(p(D))(x) = 0$ כאשר p הפולינום האופייני $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$

לכן מרחב הפתרונות V הוא $\ker p(D) \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$.

תזכורת:
אם U מרחב וקטורי ו-$T: U \to U$ אופרטור לינארי ו-$p(x)$ פולינום כלשהו!
אז $p(T)$ זה אופרטור לינארי כמו שהגדרנו קודם וגם אם q גם פולינום אז
$(p \circ q)(T) = (pq)(T) =$
$= (q \circ p)(T)$
כי זה אותו ה-T בשניהם

למה: לכל שני פולינומים p, q מתקיים $p(D) \circ q(D) = (pq)(D) = q(D) \circ p(D)$

הוכחה מהתזכורת

שים לב ש-D אופרטור לינארי על מרחב וקטורי ממשי

דוגמא:

$$(D+1)(D+2)(f) = (D+1)(f' + 2f) = (f'' + 2f' + f' + 2f) = (f'' + 3f' + 2f)$$
$$= (D^2 + 3D + 2)(f)$$

מסקנה: אם $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ אז נקבל

$$p(D) = (D-\lambda_1)^{m_1} \circ (D-\lambda_2)^{m_2} \circ \dots \circ (D-\lambda_k)^{m_k}$$

והדבר אותו ממשיך כעין של $p(D)$ ולכן מספיק שנמצא גרעין של כל גורם לינארי בנפרד, כלומר מתקיים

$\underbrace{\ker (D-\lambda_j)^{m_j}}_{V_j} \subseteq \ker p(D) = V$. ובנוסף מתקיים נוכל להוכיח

$$\bigoplus_{j=1}^{k} V_j = V$$

אז נרצה לחקור את הגורם הלינארי הפשוט

נוסחא:

$$(D-\lambda)(e^{\mu t} p(t)) = \dot{p} e^{\mu t} + \mu e^{\mu t} p - \lambda e^{\mu t} p = e^{\mu t} \dot{p} + e^{\mu t} (\mu - \lambda) p$$

ובפרט נשתמש רק שהוא פולינום כלשהו.

⊝ אם $\lambda \neq \mu$ אז קיבלנו פולינום מאותה הדרגה בדיוק, כפול $e^{\mu t}$. כלומר המעלה לא יורדת.

במקרה נקבל μ להיות שורש הפולינום ולכן יורד עם λ

⊝ אם $\mu = \lambda$ אז מתקיים $(D-\lambda)(e^{\mu t} p(t)) = e^{\mu t} \dot{p}$

כל פונ' אפשר לכתוב כך...

מסקנה: אם נרצה לחקור את $\ker (D-\lambda)^m$ אז ננסה לפתור את המשוואה $(D-\lambda)^m f = 0$. ~~[illegible]~~ נכתוב $f = e^{\lambda t} p$ ואז

יתקיים מהנוסחא לעיל $(D-\lambda)^m f = e^{\lambda t} p^{(m)}$, לכן כדי לקבל האפס נדרוש $p^{(m)} = 0$

2/4/14

המשך שיעור 7

!לכן אם $p^{(m)}\equiv 0$ אז p בהכרח פולינום. לכן כל פתרון, כלומר כל איבר בקרנל יהיה מהצורה $x(t)=e^{\lambda t}(p_0+p_1t+\dots+p_{m-1}t^{m-1})$. לכן <u>כל פתרון למשוואה</u> $(D-\lambda)^m x=0$ יהיה צירוף של הפונ' $\{t^i e^{\lambda t}\}_{i=0}^{m-1}$, וכל צירוף שלהם בבירור הוא פתרון, לכן זו קבוצה פורשת לפתרונות. [עוד לא הוכחנו אי-תלות].

אבל אנחנו מקבלים אי-תלות בחינם! כי זו קבוצה פורשת מגודל m במרחב ממימד m!

לכן הם בת"ל. לכן בסיס!

⊖ אז הבנו בדיוק איך נראה $\ker(D-\lambda)$. ויודעים $\ker(D-\lambda_i)\subseteq \ker p(D)$! לכן כל הפונ' מהצורה $t^k e^{\lambda_j t}$ הן פתרונות למד"ר. כלומר כל הפונ' שהופיעו בניסוח המשפט הם אכן פתרונות למד"ר שלנו $p(D)(x)=0$.

כמו כן $\dim\ker(D-\lambda_j)=m_j$. צריך להראות שלוקחים את כולם יחד הם נשארו בת"ל ואז נקבל אפיון מלא של $\ker p(D)$, מסכימה פשוטה של המימדים.

<u>הגדרה:</u> קוואזי פולינום זו פונ' $f(t)=e^{\lambda t}p(t)$ כאשר p פולינום.

<u>למה:</u> יהיו $f_1,\dots,f_k$ קוואזי פולינומים כך שלכולם בעלי אקספוננט שונה. כלומר אם $f_i=e^{\lambda_i t}p_i$ אז $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$, ו- $p_i\neq 0$ לכל i אזי הם בת"ל.

3/4/14

שיעור שבוע 7

<u>תזכורת:</u> ניסינו לפתור המשוואה $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=0$. הגדרנו פולינום אופייני $p(\lambda)$. נניח שהשדה מפוצל! $p(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$. הגדרנו D אופרטור הגזירה והסתכלנו על $p(D)$. ראינו שמתקיים $\ker p(D)$ זה בדיוק מרחב הפתרונות.

ראינו גם כי $V_i\overset{def}{=}\ker(D-\lambda_i)^{m_i}\subseteq\ker p(D)$. כלומר $V_i\subseteq V$ לכל i. ראינו גם כי $V_i=\mathrm{span}\{e^{\lambda_i t},te^{\lambda_i t},\dots,t^{m_i-1}e^{t\lambda_i}\}$.

אז V_i זה מרחב הקוואזי פולינומים מהצורה $e^{\lambda_i t}p(t)$ כאשר $\deg p\le m_i-1$! $\dim V_i=m_i$ לכן הם בת"ל. נותר לנו להראות שיחד כל ה- V_i הם בדיוק V.

<u>תזכורת מאלגברה:</u> אם $V_1,\dots,V_k\subseteq V$ אז נגדיר שהם סכום ישר, כלומר $\bigoplus_{i=1}^{k}V_i=k$ אם:

(א) $V_1+\dots+V_k=V$ כלומר הם פורשים את כל V.

(ב) $0=V_i\cap(\bigcup_{j\neq i}V_j)$

<u>או שקול:</u> כל $v\in V$ ניתן להציג בצורה <u>יחידה</u> $v=\sum_{i=1}^{k}v_i;\ v_i\in V_i$

3/4/14

המשך שיעור 7

אי תלויות את וקטור האפס אפשר להציג רק באופן טריוויאלי כסכום של וקטורים ממרחבים שונים.

אי תלויות: בסיס של V שנקבל מאיחוד בסיסי V_i, [באשר איחוד עם כפילויות...]
כמובן שמתקיים $\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i$ אם הם אכן סכום ישר.

אז נחזור למקרה שלנו:

הגדרנו k מרחבים, $V_i \subseteq V$ כאשר כל אחד מתאים לשורש שונה אחר של הפולינום האופייני. נרצה לטעון $\bigoplus_{i=1}^{k} V_i = V$

הוכחה:
קודם כל נראה שזה סכום ישר, ואז נקבל מייד שהסכום שלהם הוא כל V משיקולי מימדים כאמור. כי $\dim V = n = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} \dim V_i$

$\boxed{\text{הראינו כבר...}}$

לכן: $\dim(\bigoplus_{i=1}^{k} V_i) = \dim V$
לכן מספיק שנראה שזה אכן סכום ישר ונקבל אפיון מלא של מחב הפתרונות כמו שרצינו.

קיבלנו אותה הבנה שגם בתחילת שיעור שעבר אמור

אז למה הסכום ישר? נזכיר למה שלא שני קוואזי פולינומים עם אקספוננט שונה הם בלתי תלויים לינארית ואז נקבל שהסכום ישר כי כל הקבוצה $\{v_i\}$ רק של $v_i \in V_i$ תהיה בת"ל ולכן זה סכום ישר.

למה: נסמן $f_1,\dots,f_k$ קוואזי פולינומים כך ש $f_s \in V_s$ אז הם בת"ל.
כלומר אם $f_1+\dots+f_k = 0$ אז $\forall_i\ f_i = 0$

כלומר נראה שהסכום שלהם מתאפס, אז כל אחד אפס. זה גורר שמספיק שהסכום ישר

הוכחה: נראה ש f_1 חייב להיות אפס. מתקיים $\deg f_1 \le m_1 - 1$.
נגדיר אופרטור דיפרנציאלי: $l(D) = (D-\lambda_1)^{d} \prod_{i=2}^{k} (D-\lambda_i)^{m_i}$ כאשר $d = \deg f_1$
ונפעיל את $l(D)$ על שני האגפים של $\sum_{i=1}^{k} f_i = 0$.
בבירור שמתקיים $l(D)(f_j)$ לכל $2 \le j \le k$ כי מופיע הגורם המאפס.
מה קורה כאשר $l(D)(f_1)$? [כזכור אפשר להחליף סדר הפעולה במכפלה]
כאמור $f_1(t) = e^{\lambda_1 t} \sum_{j=0}^{d} p_j t^j$, לכן $(D-\lambda_1)^{d}(f_1) = e^{\lambda_1 t} \cdot (d!) p_d$

כעת מה קורה כאשר $(D-\lambda_j)(e^{\lambda_1 t}) = (\lambda_1 - \lambda_j) e^{\lambda_1 t}$
לכן $(D-\lambda_j)^{m_j}(e^{\lambda_1 t}) = e^{\lambda_1 t}(\lambda_1-\lambda_j)^{m_j}(d!)p_d$ לכן לסיכום נקבל
$l(D)(f_1) = e^{\lambda_1 t} d! \cdot p_d \prod_{1 \ne j} (\lambda_1 - \lambda_j)^{m_j}$ ← $l(D)(f_1) = 0$ מהשוויון לעיל. לכן $p_d = 0$
בסתירה למעלה... לכן $f_1 \equiv 0$ [דבר נכון לכל הפולינום, זה רק 1!]

3/4/14

המד"ר שיעור 7

עם מקדמים קבועים

הערה: ולכן זה סכום ישר. לכן כל פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית ההומוגנית ניתן להציג באופן יחיד כסכום של קוואזי פולינומים, כאשר האקספוננט הוא שורש הפולינום האופייני.

$x(t)=\sum_{i=1}^{k} f_i(t)$ כאשר $f_i(t)=e^{\lambda_i t}p_i(t)$; $\deg p_i(t)\le m_i-1$

ובסיס למרחב הפתרונות V מתקבל כאיחוד בסיסי V_i.

שיטת מקדמים לא ידועים למשוואה לא הומוגנית

נאמר יש לנו משוואה לא הומוגנית $p(D)x=f(t)$, כאשר $f(t)$ איזשהי פונ'.

① אם $f(t)$ קוואזי פולינום, כלומר $f(t)=e^{\mu t}P(t)$; P פולינום ב t.

טענה: למשוואה $p(D)x=e^{\mu t}P(t)$ קיים פתרון בצורת קוואזי פולינום:

Ⓐ אם μ אינו שורש של הפולינום p אז קיים פתרון $x(t)=e^{\mu t}q(t)$ כאשר $\deg q\le\deg P$. ואז השיטה אומרת שנציב פולינום לא ידוע במשוואה, נגזור, נקבל משוואות על המקדמים ונפתור ונמצא את q.

Ⓑ אם μ כן שורש לפולינום, בה"כ $\lambda_1=\mu$ אז ניתן למצוא פולינום מהצורה $x(t)=t^{m_1}\cdot e^{\mu t}\cdot q(t)$ כאשר $\deg q=\deg P$

הערה קטנה: ב Stack אנחנו מנסים להבין איך לפתור משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n, כאשר המקדמים קבועים

דוגמא:

$\ddot{x}+\omega_0^2x=F\sin\omega t$. אז $p(\lambda)=\lambda^2+\omega_0^2$; $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$

; $m_1=m_2=1$. [בגלל ה $\sin$ זה בצורת קוואזי פולינום] למעשה נפתור את המשוואה

$\ddot{x}+\omega_0^2x=Fe^{i\omega t}$ ואז נקח את החלק המדומה של הפתרון והוא יפתור המשוואה שלנו.

קוואזי פולינום

לכן כדי לפתור צריך לבדוק האם ωi שורש לפולינום:

[לא תהודה] Ⓐ $\omega\ne\omega_0$ [התדירות החיצונית שונה מהתדירות הפנימית] ; אז הפתרון שלנו Z יקיים $Z(t)=e^{i\omega t}\cdot A$ ואז:

$$\begin{cases}\dot{Z}=A(i\omega)e^{i\omega t}\\ \ddot{Z}=-A\omega^2e^{i\omega t}\end{cases}\rightarrow Ae^{i\omega t}(\omega_0^2-\omega^2)=Fe^{i\omega t}\rightarrow A=\frac{F}{\omega_0^2-\omega^2}$$

עדיף לא לזכור התשובה, זו רק דוגמא

לכן בשיטה הזו מצאנו את Z ; $Z=\frac{F}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot e^{i\omega t}$

לכן הפתרון למשוואה עם ה $\sin$ הוא החלק המדומה, כלומר $\frac{F}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\sin(\omega t)$

וככה מצאנו פתרון פרטי.

[עם תהודה] Ⓑ $\omega=\omega_0$. אז צריך לחפש פתרון פרטי מהצורה: $Z(t)=t\cdot Ae^{i\omega t}$.

זה דבר תהודה! כלומר העוצמה משתנה עם הזמן ← שכן הקצב הפנימי מתאים עם הקצב החיצוני אז האמפליטודה רק תגדל ואז הגשר יקרוס.

3/4/14

תרגול שבוע 7

שיטת וריאציית המקדמים למד"ר מסדר גבוה (לינארית)

תהי מד"ר לינארית מתוקנת $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=b(t)$

בשלב הראשון נפתור את הבעיה ההומוגנית למד"ר: [כאן אנחנו עוד לא יודעים איך... בשיעור ראינו את העניין עם הפולינום האופייני וכו'...]

ונקבל את הפתרונות היסודיים, דהיינו הבסיס, $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$. אז כל פתרון הומוגני כללי $x(t)$ הוא $x(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(t)$ כאשר $a_i\in\mathbb{R}$.

המרצה צ"ין במפורש שאין לו מושג מה הקשר בשאלה 2 במבחן. אמר ומה לא הבנו אותה...

בשלב השני נחפש פתרון למשוואה הלא הומוגנית בשיטה:

$x(t)=\sum u_i(t)\varphi_i(t)$; כלומר נניח שהמקדמים הן פונ' ולא קבועים, ואז נמצא אותם ונקבל פתרון כללי לא הומוגני.

זה מתבקש נקודתי! לכן המקדמים אינם קבועים...

כדי למצוא את המקדמים הללו יש מספיק n-1 אילוצים לינאריים על הנגזרות ומקבלים מערכת משוואות:

$$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\begin{pmatrix}\dot u_1\\ \vdots\\ \dot u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(t)\end{pmatrix}$$

מטריצת ורונסקי כפי שהגדרנו בשיעור

מכיוון ש $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ בסיס הפתרונות לכן W הפיכה כפי שראינו בעבר כבר כמה פעמים. לכן נקבל פתרון יחיד עבור $(\dot u_1,\dots,\dot u_n)$

תרגיל: פתרו המשוואה $\ddot y-y=t$ ותנאי התחלה ($y(0)=0$; $\dot y(0)=1$).

[זו מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים, כפי שראינו בהרצאה]

שלב I: נפתור את $\ddot y-y=0$. אז כאשר הפולינום האופייני הוא $\lambda^2-1=0$ לכן $\lambda=\pm1$ לכן פתרונות יסודיים הם e^t, e^{-t}. לכן כל פתרון הוא $x=Ae^t+Be^{-t}$.

עוד לא דיברנו על זה. אבל העיקרון לנחש פתרונות אנחנו כבר יודעים לפתור

שלב II: פתרון לא הומוגני יהיה $x(t)=u_1(t)e^t+u_2(t)e^{t}$; נפתור את ~~...~~ המערכת הלינארית

$$\begin{pmatrix}e^t & e^{-t}\\ e^t & -e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot u_1\\ \dot u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$$

לכן נקבל בהפיכה:

$$\begin{pmatrix}\dot u_1\\ \dot u_2\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-e^{-t} & -e^{-t}\\ -e^t & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-te^{-t}\\ te^t\end{pmatrix}$$

לכן מאינטגרציה בחלקים נקבל $u_1=\frac{1}{2}(te^{-t}-e^{-t})+Const_1$

$u_2=\frac{1}{2}(te^t-e^t)+Const_2$

למרצה קשה היה עם החישוב... לנושא את זה...

כעת בעזרת תנאי ההתחלה נמצא הקבועים... מציבים בפתרון, ובסוף מציבים את הפתרון ואת הקבועים...

3/4/14

המשך תרגול 7

נוסחת אבל ליוביל:

נתונה לנו מד"ר מסדר גבוה $y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=0$ כאשר a_i פונ' של t, לא קבועים. אז מתקיים נוסחת מד"ר כלשהו על הוורונסקיאן.

$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_{n-1}(s)ds}$. בפרט הוורונסקיאן תמיד שונה מאפס...

הוורונסקיאן עבור פתרונות בת"ל כלשהם

שימוש הוורונסקיאן להורדת סדר של מד"ר:

אם יש לנו n-1 פתרונות כבר, אז ניתן להוריד סדר. נניח $n=2$, אז המד"ר הוא $\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0$ ונניח שנתון פתרון פרטי $\varphi(t)$ כלשהו, אז מתקיים שאם ψ פתרון בת"ל ב-φ כלשהו אז מתקיים

$$\begin{vmatrix}\varphi & \psi\\ \dot\varphi & \dot\psi\end{vmatrix}=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}\longrightarrow \varphi\dot\psi-\dot\varphi\psi=\text{Const}\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$$

נוסחת אבל

ושים לב שאין חשיבות! const שבחרנו כי אנחנו רק מחפשים פתרון בת"ל אחר, אז ניקח $\text{const}=1$

נחלק ב-φ^2 את המשוואה

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'=\frac{\varphi\dot\psi-\dot\varphi\psi}{\varphi^2}=\frac{e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}}{\varphi^2}$$

ולכן מאינטגרציה נקבל פתרון סופי:

$$\psi=\varphi\int\frac{e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}}{\varphi^2}$$

הקדומה...

דוגמא: $(2t+1)\ddot{y}+4t\dot{y}-4y=0$ ונניח שנתון פתרון פרטי $y=e^{-2t}$. מתקיים! $2t+1>0$. אז נמצא עוד פתרון בת"ל בפתרון הנתון ורק נמצא את כולם.

פתרון: ניקח $t_0=0$. סוס

$$W(t)=\begin{vmatrix}e^{-2t} & \psi\\ -2e^{-2t} & \dot\psi\end{vmatrix}=W(0)e^{-\int_0^t\frac{4s}{2s+1}ds}$$

בה"כ $W(0)=1$, כי רק מחפשים פתרון בת"ל.

לכן!

$$W(t)=e^{-\int_0^t 2-\frac{2}{2s+1}ds}=e^{-2t+\ln(2t+1)}=e^{-2t}(2t+1)$$

לפי מה שראינו קודם נקבל

$$\psi=e^{-2t}\int_0^t\frac{e^{-2s}(2s+1)}{e^{-4s}}ds=e^{-2t}\int_0^t e^{2s}(2s+1)ds=e^{-2t}\int_0^t e^{2s}2s\,ds+\frac{e^{2t}}{2}e^{-2t}=$$

אינטגרציה בחלקים

$$=e^{-2t}\cdot\text{Const}+t\longrightarrow C_1t+C_2e^{-2t}=x(t)\ \text{פתרון כללי}$$