26/3/14

שיעור שבוע 6

תזכורת: אנחנו עוסקים במשוואות ליניאריות מסדר גבוה n. ראינו שמשוואה כזו היא מהצורה $0 = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x$. כזכור נסמן V מרחב הפתרונות, אזי ראינו ש V מרחב וקטורי ! $n = \dim V$ והוכחנו זאת ע"י בניית העתקה שמתאימה לכל פתרון $\varphi \in V$ את וקטור תנאי ההתחלה ב $\mathbb{R}^n$.

כזכור $a_i \in C[a$

$$\Psi_{t_0} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \; ; \; \Psi_{t_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \dot\varphi(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

וראינו ש Ψ_{t_0} איזומורפיזם.

מסקנות:

① אם $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ הם k פתרונות למשוואה שלנו אזי $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ בלתי תלויים ליניארית במרחב V אמ"מ וקטורי תנאי ההתחלה שלהם בנקודה t_0 בלתי תלויים ליניארית כוקטורים של $\mathbb{R}^n$. כלומר $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ בת"ל אמ"מ $\{\Psi_{t_0}(\varphi_1), \dots, \Psi_{t_0}(\varphi_k)\}$ וזה ברור, כי איזומורפיזם שומר את ליניאריות באופן ברור.

נשים לב שאין חשיבות לנקודה t_0 שבחר

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\Psi_{t_0}"'] \arrow[dr, "\Psi_{t_1}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\Psi_{t_1}^{-1}\circ\Psi_{t_0}"'] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

איזומורפיזם

② כדי לבנות בסיס ב V צריך לבחור $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ב $\mathbb{R}^n$ והפתרונות שמקיימים תנאי התחלה אלה יהוו בסיס ב V; כלומר $\{\Psi_{t_0}^{-1}(v_1), \dots, \Psi_{t_0}^{-1}(v_n)\}$ בסיס ! V מרחב הפתרונות; וזה שוב ברור מהיותה איזומורפיזם.

③ אם $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בסיס ב V אז כל פתרון φ מקיים $\varphi(t) = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ בהכרח. איך נמצא את המקדמים? אז מקיים

$$\Psi_{t_0}(\varphi) = c_1\Psi_{t_0}(\varphi_1) + \dots + c_n\Psi_{t_0}(\varphi_n) = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$$

כי זה איזומורפיזם; לכן את המקדמים נמצא ע"י פרישת וקטור תנאי ההתחלה בבסיס ב $\mathbb{R}^n$. כלומר המקדמים הם הקורדינטות של פרישת $\Psi_{t_0}(\varphi)$ לפי בסיס $\Psi_{t_0}(\varphi_1), \dots, \Psi_{t_0}(\varphi_n)$.

דוגמה: $\ddot{x} + w^2x = 0$; אז נבחר בסיס סטנדרטי $e_1 = \binom{1}{0}$! $e_2 = \binom{0}{1}$. אז נרצה למצוא פתרונות שמקיימים את תנאי התחלה אלה ב t_0 כלשהו, נניח $t_0 = 0$. כלומר נחפש φ_1, φ_2 רק ש $\begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \dot\varphi_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$! $\begin{pmatrix} \varphi_2(0) \\ \dot\varphi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ וזה יפרוש את כל הפתרונות.

אז נקבל $\varphi_1 = \cos wt$! $\varphi_2 = \frac{1}{w}\sin wt$ וזה בסיס לכל הפתרונות V.

קל לבדוק שאלה אכן פתרונות ומשפט קיום ויחידות.

לכן קיבלנו אוטומטית ש φ_1, φ_2 בלתי תלויים ליניארית ב V.

26/3/14

המשך שיעור קודם

שאלה: נתונות $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ פונ' על קטע $[a,b]$. איך נבדוק האם הם בת"ל לינארית במרחב כל הפונ' מעל $[a,b]$.

אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ תלויים לינארית בקטע $[a,b]$ אז קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ לא כולם אפס כך שמתקיים $0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(t)$ לכל $t\in[a,b]$! ולכן מגזירה נקבל גם שיוויון

ולכן אם נגזור $n-1$ פעמים נקבל $0=\sum\alpha_i\varphi_i^{(k)}(t)$ לכל $0\le k\le n-1$

וקיבלנו מערכת משוואות לינארית, כי יש לנו n משוואות. נסמן

$$Mat_{n\times n}\ni W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=\begin{pmatrix}\varphi_1,\dots,\varphi_n\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)},\dots,\varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{מטריצת וורונסקי}}$

ולכן אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ תלויים לינארית אז $W(f_1,\dots,f_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=0$ מכפל מטריצה פשוט. ויודעים כי לא כל ה $\alpha_i=0$.

ולכן למערכת הזו $Wx=0$ יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן $\det W\equiv 0$ מעל המרחב הוקטורי של הפונ'. כלומר $\det W$ זו פונ' האפס, כלומר $0=(\det W)(t)$

ולכן אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ תלויים לינארית מעל $[a,b]$ אז $0=\det W(t)$ לכל $t\in[a,b]$

ולכן אם קיים $w(t_0)\neq 0$ אז $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ בת"ל בקטע $[a,b]$.

זה לא אמ"מ

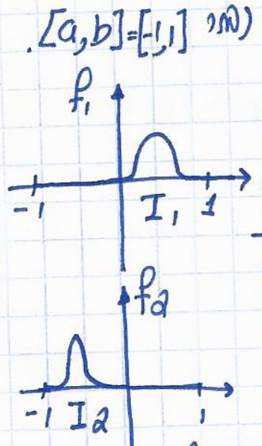
לדוגמא של 3 פונ', 3 פונ' שאפס של... אבל היה טעות

⊖ אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ הם n פתרונות של משוואה דיפרנציאלית מסדר n אז מתקיים $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ בת"ל ב $[a,b]$ $\longleftrightarrow$ $\exists t_0\in[a,b]:\underbrace{w(t_0)}_{\text{הוורונסקיאן}}\neq 0$.

ורונסקי...

כלומר הדוגמא מצד שמאל לא יכולה להתקיים אם הם פתרונות של מערכת משוואות. בעיקר הדוגמא משמאל לא יכולה להיות פתרון למערכת משוואות, כי יש שם פתרון שמתלכד עם פתרון האפס אבל אינו פתרון האפס בסתירה ליחידות.

דוגמא: יתכן שקיימות φ_1,φ_2 בת"ל על הקטע $[a,b]$ שהדט' של וורונסקי שאפס בכל הקטע ועדיין הם בת"ל. (למשל $[a,b]=[-1,1]$.



ברור שאלו פונ' בת"ל לינארית...

דט' הוורונסקי:

$$W(f_1,f_2)=\begin{pmatrix}f_1(t)&f_2(t)\\ f_1'(t)&f_2'(t)\end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$w(t)=f_1\cdot f_2'(t)-f_2(t)\cdot f_1'(t)$$

וברור שזה שאפס בכל מקום...

הוכחה של האמ"מ: [כיוון אחד הוכחנו]

נניח כי מתקיים

$$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t_0)=\begin{pmatrix}\varphi_1,\dots,\varphi_n\\ \varphi_1',\dots,\varphi_n'\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)},\dots,\varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}(t_0)$$

אבל עמודות המטריצה הזו הם בדיוק וקטורי תנאי ההתחלה של הפתרונות. ולכן הם נקבעים בת"ל כי הוכחנו ש $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ בת"ל. לכן הדטרמיננטה לא אפס

כי אינו שהוכחנו הם בת"ל אמ"מ וקטורי תנאי ההתחלה בת"ל

28/3/14

הרצאה שיעור 6

טענה: (Liouvel-abel-Gaus...-formula).

אם $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\dots+a_n(t)x=0$! ו-$\varphi_1,\dots,\varphi_n$ הם n פתרונות למשוואה ונסמן $w(t)$ להיות $\det W$ כאשר W מטריצת ורונסקי. אז מתקיים $w(t)$, פונ', מקיים משוואה מסדר ראשון הבאה: $\dot{w}(t) = -a_1(t)w$.

זו משוואה לינארית הומוגנית של סדר ראשון ואנחנו יודעים לפתור ונקבל $w(t)=w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$.

כלומר לא תמיד נוח למצוא את הפתרונות למשוואה אבל תמיד נוח למצוא את ורונסקי

הערות: ⊖ במה המקרה הכללי למצוא בסיס $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ לא נוח למצוא את $w(t)$.

⊖ אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ תלויים לינארית אז כבר $w(t)\equiv 0$ ולכן הטענה מתקיימת באופן טריוויאלי.

⊖ **דוגמא:** $\ddot{x}+\omega(t)x=0$ לכן $a_1(t)=0$, לכן $w(t)=const$. בפרט אם $\omega(t)=\omega^2$ אז $\ddot{x}+\omega^2x=0$ אז θ שני פתרונות $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ ואז $w(t)=\det\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\end{pmatrix}=\omega$ וזה אכן קבוע.

הוכחת הטענה:

תזכורות: נגזרת של דטרמיננטה: $w(t)=\det W$. נסמן $W(t)=\begin{pmatrix}-R_1(t)-\\ \vdots\\ -R_n(t)-\end{pmatrix}$ אז אפשר יהיה $R_i=(\varphi_1^{(i-1)}(t),\dots,\varphi_n^{(i-1)}(t))$

אז מתקיים: $\dot{w}(t)=(\det W(t))' =$ סכום של n דטרמיננטות של המטריצה הבאה

$$\dot{w}(t)=\det\begin{pmatrix}-\dot{R}_1-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}-R_1-\\ -\dot{R}_2-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+\dots+\det\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -\dot{R}_n-\end{pmatrix}$$

הנוסחא הזו נובעת מכלל לייבניץ: $(f_1\cdots f_t)'=f_1'f_2\cdots f_t+\dots+f_1\cdots f_t'$

כי כזכור דטרמיננטה זה סכום של מכפלות של המטריצה:

$$\det W(t)=\sum_{\sigma\in S_n}\text{sign}(\sigma)\cdot\underbrace{W_{1,\sigma(1)}\cdots W_{n,\sigma(n)}(t)}_{\text{מכפלה של פונ' של } t}$$

ולכן בעזרת כלל לייבניץ נקבל את הסכום של n הדטרמיננטות שעל הגזירה

20/3/14

המשך שיעור 6

המשך הוכחה: לכן במקרה שלנו, כאשר $w(t)$ זה מטריצת וורונסקי של $\varphi_1,...,\varphi_n$ הפתרונות שלנו.
כלומר $R_i = \varphi_1^{(i-1)}(t),...,\varphi_n^{(i-1)}(t)$ שורת המטריצה שלנו, לכן מתקיים $\dot{R}_i = R_{i+1}$ באופן ברור. [כאשר לגזור שורה זה לגזור כל איבר].

לכן מתקיים שכל הדטרמיננטות בסכום יתאפסו כי יהיה בהם שתי שורות זהות, פרט לדטרמיננטה:

$$\dot{w}(t) = \det\begin{pmatrix} - R_1 - \\ \vdots \\ - R_n - \end{pmatrix}$$

רק השורה האחרונה נגזרת...

לכן

$$\dot{w}(t) = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ \varphi_1^{(n)},...,\varphi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

אבל כזכור $\varphi_1,...,\varphi_n$ הם פתרונות למשוואה, לכן מתקיים $\varphi_k^{(n)} = -a_1(t)\varphi_k^{(n-1)} - ... - a_n(t)\varphi_k$ לכל $k=1,...,n$. לכן מתקיים

$$\dot{R}_n = (\varphi_1^{(n)},...,\varphi_k^{(n)}) = -a_1(t)R_n - a_2(t)R_{n-1} - ... - a_n(t)R_1$$

לכן השורה האחרונה תלויה לינארית בשורות שמעליה ועוד שורה R_n.

לכן מתקיים:

$$\dot{w}(t) = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ -a_1(t)R_n - a_2(t)R_{n-1} - ... - a_n(t)R_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ -a_1(t)R_n \end{pmatrix} = -a_1(t)w(t)$$

כי כל השאר זה 0 שווה

לכן $\dot{w}(t) = -a_1(t)w(t)$ כנדרש.

דוגמא: אפשר להשתמש בשאלה הזו כדי להוריד סדר של משוואה. למשל
$\ddot{x} + \frac{1}{4t^2}x = 0$ עבור $t>0$. אז כזכור מחפש הפתרונות קו-ממדי, לכן צריך שני פתרונות, ננחש אחד בעזרת ניחוש, ננסה $x(t) = t^\lambda$. ואז מתקיים

$$(\lambda(\lambda-1)+\tfrac{1}{4})t^{\lambda-2} \xrightarrow[\text{שמתקיים}]{\text{לכן נרצה}} \lambda(\lambda-1)+\tfrac{1}{4}=0 \to (\lambda-\tfrac{1}{2})^2=0$$

לכן ניקח $\lambda=\frac{1}{2}$ ואז $\sqrt{t}$ יהיה פתרון למערכת. אבל הפתרון בפוקס למצוא רק אחד וזה בעיה, לא נוכל למצוא עוד אחד כי למשוואה הריבועית יש רק שורש אחד. אז נסמן $\varphi_1(t)=\sqrt{t}$ ונחפש פתרון $\varphi_2(t)$. אז כאמור ראינו שלמערכת כזו מתקיים שהדטרמיננט וורונסקי שלה הוא <u>קבוע</u> כי $a_1(t)\equiv 0$. ומתקיים

$$Const = \begin{vmatrix} \sqrt{t} & \varphi_2(t) \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & \dot{\varphi}_2(t) \end{vmatrix} \longrightarrow \sqrt{t}\,\dot{\varphi}_2(t) - \frac{\varphi_2(t)}{2\sqrt{t}} = Const$$

לכן נפתור משוואה זו לקבוע מסוים.

השימוש בדטרמיננט וורונסקי כדי לפתור משוואה יותר פשוט

זה לא משנה איזה קבוע נבחר כי זה רק כדי למצוא וקטור נוסף לבסיס.
אנחנו יודעים לפתור המערכת הזו כי זו מערכת לינארית מסדר 1. ונקבל $t\ln\sqrt{t}$

26/3/14

המשך שיעור 6

הורדת סדר של משוואה הומוגנית:

נניח $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\dots+a_n(t)x=0$ מד"ר מסדר n. $t\in(a,b)$! ויהי $\varphi(t)$ פתרון לא טריוויאלי בקטע (a,b). נחפש פתרון מהצורה $x(t)=\varphi(t)y(t)$

אז יתקיים $\dot{x}(t)=\dot{\varphi}y+\varphi\dot{y}$ ובנוסף $\ddot{x}=\varphi\ddot{y}+2\dot{\varphi}\dot{y}+\ddot{\varphi}y$

ובאופן כללי יתקיים $x^{(n)}=\varphi y^{(n)}+\dots+\varphi^{(n)}y$

אז יש לנו $n+1$ משוואות. נכפול כל משוואה במקדם a_i המתאים לה ונחבר הכל, אז הסכום יצא אפס ובנוסף נקבל ביטוי מצומצם:

$$0=\sum_{k=1}^{n}b_k(t)y^{(k)}+y\underbrace{(\cancel{\varphi^{(n)}+\dots+a_n\varphi})}_{\text{זה מתאפס}}$$ ← כי φ פתרון...

אז זו בעצם משוואה מסדר n אבל y לא מופיע בה. נסמן $z=\dot{y}$ ואז z מקיים משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר $n-1$ וככה הצלחנו להוריד את הסדר ב-1, ואז לפתור באופן קסום עבור z ולקבל את y ורק לבסוף אז $x=\varphi y$ הפתרון הנוסף שלנו.

לינאריות ← **משוואה לא הומוגנית מסדר n:** [עד עכשיו טיפלנו רק בהומוגניות]

1) אם יש לנו משוואה $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\dots+a_n(t)x=f(t)$, אז לא נכון ש מרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי, אבל אם φ_1,φ_2 שני פתרונות למשוואה, אז $\varphi_2-\varphi_1$ יהיה פתרון של משוואה הומוגנית, הצמודה למשוואה זו. ובאופן יתקיים $\varphi_2-\varphi_1=\sum_{i=1}^{n}c_i\psi_i$ כאשר ψ_i פתרונות המהווים בסיס למשוואה ההומוגנית.

ומזה נקבל $\varphi_2(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\psi_i+\varphi_1(t)$ ולכן כל פתרון למשוואה לא הומוגנית הוא סכום של פתרון פרטי למשוואה ועוד פתרון של המשוואה ההומוגנית.

זה מרחב אפיני ☺ איזה יופי... [illegible] לא מאפס

2) תהי משוואה לא הומוגנית כמו לעיל, והמקדם החופשי נסמן $f(t)+g(t)$. נניח שיש לנו פתרון $\varphi(t)$ למשוואה $x^{(n)}+\dots+a_nx=f(t)$ ויש לנו פתרון אחר $\psi(t)$ למשוואה $x^{(n)}+\dots+a_nx=g(t)$ אז $\varphi+\psi$ הוא פתרון למשוואה $x^{(n)}+\dots+a_n(t)x=f(t)+g(t)$. [הוכחה טריוויאלית...]

זה נקרא עקרון הסופרפוזיציה.

כך לפתור משוואה לא הומוגנית אז נחפש פתרון ונפתור עבור ההומוגנית

26/3/14

המשך שיעור 6

שיטת וריאציית המקדמים: [שיטה לפתור מערכת לא הומוגנית]

פתרון כללי למשוואה ההומוגנית הוא מהצורה $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ כאשר φ_i בסיס למרחב הפתרונות ההומוגני. נחפש פתרון של המשוואה הלא הומוגנית בצורה:

$x(t)=c_1(t)\varphi_1(t)+\dots+c_n(t)\varphi_n(t)$; כלומר נאפשר לקבועים להיות פונ' של t. נרצה כעת לגזור את הביטוי הזה n פעמים ולהשוות ל-$f(t)$ הקבוע במשוואה.

אז מתקיים $x'(t)=\sum c_i(t)\varphi_i'+\underbrace{\sum c_i'(t)\varphi_i}$ $\overset{\text{נדרוש}}{\Leftarrow}$ $x'(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i'(t)$

נדרוש שזה יתאפס. זה ממש לא מובן מאליו, אבל אנחנו דורשים את זה. אז רק נראה שזה עובד...

ואז נמשיך לגזור ולדרוש התאפסות של החלק השני $n-1$ פעמים עד שנקבל

$$x^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i^{(n-1)}$$

ואז נגזור שוב פעם אחרונה, והפעם לא נדרוש התאפסות.

נקבל לסיום:
$$x^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}$$

כאשר דרשנו שמתקיים $\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\varphi_i^{(k)}$

כעת נציב את כל הנגזרות של x במשוואה הלא הומוגנית. משום ש-φ_i פתרונות למשוואה ההומוגנית אז הכל יתאפס כמעט ונשאר עם המשוואה $f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i'\varphi^{(n-1)}$.

נוסיף למשוואה הזו את הדרישות שלנו ונקבל מערכת משוואות מהצורה

$$\left.\begin{aligned}
c_1'\varphi_1+\dots+c_n'\varphi_n&=0\\
c_1'\varphi_1'+\dots+c_n'\varphi_n'&=0\\
&\vdots\\
c_1'\varphi_1^{(n-2)}+\dots+c_n'\varphi_n^{(n-2)}&=0\\
c_1'\varphi_1^{(n-1)}+\dots+c_n'\varphi_n^{(n-1)}&=f(t)
\end{aligned}\right\}$$

מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית שהיא למעשה

$$\left(W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\right)\begin{pmatrix}c_1'\\ \vdots\\ c_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(t)\end{pmatrix}$$

אבל כאמור W הפיכה כי $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ פתרונות בת"ל כי הם בסיס. לכן אפשר להפוך ולמצוא פתרון למערכת! ולקבל את x הפתרון שלנו.

27/3/14

שיעור שבוע 6

כבר דיברנו על משוואה ליניארית מסדר n לא הומוגנית, כלומר משוואה מהצורה $x^{(n)}+\dots+a_n(t)x=f(t)$ כאשר a_i רציפות. כמו כן לקחנו בסיס $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ למרחב הפתרונות למשוואה ההומוגנית ונחפש פתרון למשוואה הלא הומוגנית מהצורה $x(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i$ כלומר קומבינציה של הבסיס עם מקדמים משתנים.

27/3/14

המשך שיעור 6

ולכן נצטרך n פעמים ומקבלים n משוואות, אבל דורשים בדרך התאפסויות של הנגזרת השונות של C_i הקומבינציה עם נגזרת של φ_i → כלומר דורשים אילוצים נוספים, מקבלים n-1 אילוצים לינאריים על $\dot{C}_1,\dots,\dot{C}_n$ ונצטרך פעם נוספת ומקבלים עוד אילוץ על $\dot{C}_1,\dots,\dot{C}_n$ כי השאר יתאפסו כי $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ היו פתרונות למשוואה ההומוגנית. סה"כ מקבלים n משוואות לינאריות על $\dot{C}_1,\dots,\dot{C}_n$

אלה הדרישות שלנו על הנגזרות

$$\begin{cases} \dot{C}_1\varphi_1+\dots+\dot{C}_n\varphi_n=0 \\ \dot{C}_1\dot{\varphi}_1+\dots+\dot{C}_n\dot{\varphi}_n=0 \\ \vdots \\ \dot{C}_1\varphi_1^{(n-2)}+\dots+\dot{C}_n\varphi_n^{(n-2)}=0 \\ \dot{C}_1\varphi_1^{(n-1)}+\dots+\dot{C}_n\varphi_n^{(n-1)}=f(t) \end{cases} \longrightarrow W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\begin{pmatrix}\dot{C}_1\\ \vdots \\ \dot{C}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ f(t)\end{pmatrix}$$

שקול מסדיר כל המשוואות עם המקדמים הנכונים.

אם נשתמש $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ הפיכה ורק נמצא את $(\dot{C}_1,\dots,\dot{C}_n)$ ולכן נעשה אינטגרציה

$$\begin{pmatrix}C_1(t)\\ \vdots \\ C_n(t)\end{pmatrix}=\int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ f(s)\end{pmatrix}ds$$

ולכן $x(t)=\sum_{i=1}^{n}(C_i\varphi_i)(t)$ הוא פתרון של המשוואה הלא הומוגנית

טענה: הפתרון הפרטי למשוואה הלא הומוגנית $x^{(n)}+\dots+a_n(t)x=f(t)$ שמקיים מהצורה $\hat{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\varphi_i(t)$ כאשר המקדמים מוגדרים לקיים

$$\begin{pmatrix}C_1(t)\\ \vdots \\ C_n(t)\end{pmatrix}=\int_{t_0}^{t} W^{-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(s)\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ f(s)\end{pmatrix}ds$$

כלומר הפתרון שבנינו מהשיטה לעיל

מקיים שתנאי ההתחלה שלו בנקודה t_0 כולם מתאפסים, כלומר $x(t_0)=0=\dot{x}(t_0)=\dots=x^{(n-1)}(t_0)=0$

הוכחה: ברור שמתקיים $C_i(t_0)=0$ כי זה אינטגרל מ-t_0 לעצמו... ומכאן נקבל שכל הנגזרות שלו גם מתאפסות כי מתקיים

$$x^{(k)}(t_0)=\underbrace{\sum C_i\varphi_i^{(k-1)}(t_0)}_{\text{זה מתאפס כי } C_i(t_0)=0 \text{ כפי שאמרנו לעיל.}}+\underbrace{\sum \dot{C}_i\varphi_i^{(k-2)}(t_0)}_{\text{דרשנו שזה יתאפס. זה אחת המשוואות הלינאריות שממנה הסקנו הפתרון}}=0$$

לכל $1\le k\le n-1$

27/3/14

תרגול שיעור 6

טענה: תהי משוואה לא הומוגנית $x^{(n)}+a(t)x^{(n-1)}+\dots+a_1(t)x=f(t)$ ויהיו שיהיו לנו תנאי ההתחלה $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ $=\begin{pmatrix}x(t_0)\\ \vdots\\ x^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}$. אז פתרון $x(t)$ שמקיים תנאי ההתחלה האלה שמקבל מהצורה:

כזכור כל פתרון למשוואה הלא הומוגנית הוא פתרון פרטי שלה ועוד פתרון למשוואה הומוגנית

$$x(t)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}k_i\varphi_i(t)}+\hat{x}(t)$$

פתרון למשוואה ההומוגנית שמקיים את תנאי ההתחלה $(a_1,\dots,a_n)$

הפתרון שקיבלנו בעזרת האינטגרל מקודם שמקיים שכל תנאי ההתחלה שלו שווים אפס.

פיצלנו הבעיה לשתי בעיות. הראשונה לפתור פתרון כלשהו למשוואה לא הומוגנית, ואז למצוא פתרון למשוואה כן הומוגנית עם תנאי התחלה מסוימים.

את הקבועים $\{k_i\}_{i=1}^n$ נמצא בעזרת תנאי ההתחלה של הפתרון $x(t)$

מערכת אלגברית לינארית של תנאי ההתחלה.

$$\begin{cases}\sum k_i\varphi_i(t_0)=a_1\\ \sum k_i\varphi_i^{(1)}(t_0)=a_2\\ \vdots\\ \sum k_i\varphi_i^{(n-1)}(t_0)=a_n\end{cases}=W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t_0)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

ושוב של הפיכה, לכן נקבל, נמצא את $k_1,\dots,k_n$.

$$\boxed{x(t)=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\cdot W^{-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t_0)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\hat{x}(t)}$$

לכן בסופו של דבר נקבל פתרון סופי: כלומר זה פתרון כללי למשוואה לא הומוגנית שמקיים את תנאי ההתחלה המבוקשים.

דוגמא: $\ddot{x}+x=1$ משוואה לא הומוגנית מסדר 2. כזכור בסיס לפתרונות למשוואה ההומוגנית הם $\varphi_1(t)=\cos t;\ \varphi_2(t)=\sin t$. לכן כדי לפתור את המשוואה הלא הומוגנית צריך למצוא מקדמים כך שמתקיים $x(t)=C_1(t)\cos(t)+C_2(t)\sin(t)$

כאופן שבו למה של הפיכה ובגלל העובדה שכאופנים לא זוכרים מה היה בשיעור הקודם... גמר לה

$\cancel{\dot{x}=\dot{C}_1\cos t+\dot{C}_2}$ ~~אבל נדרוש~~

ואם נדרוש שמתקיים $\dot{C}_1\cos t+\dot{C}_2\sin t=0$ לכן נקבל:

$$\ddot{x}(t)=-C_1\cos t-C_2\sin t-\dot{C}_1\sin t+\dot{C}_2\cos t \quad\Big|\quad \dot{x}(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t$$

כזכור מצד המשוואה כדי לקבל את הלא ההומוגני

לכן נקבל כעת: מטריצה אורתוגונלית

$$\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{pmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

ואז אפשר לפתור אינטגרל מקודם מסויים. ←

$$\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\to x(t)\equiv 1$$

פתרון פרטי!

27/3/14

המשך שיעור 6

⊖ כל מה שנשאר לנו זה למצוא את הבסיס $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ במרחב V. וזה בד"כ קשה, לא תמיד אפשר לעשות את זה. אבל יש מקרים מיוחדים:

משוואות עם מקדמים קבועים:

$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=0$ כאשר a_i קבועים! כלומר לא תלויים בt.

ננחש את ~~[illegible]~~ הפתרון הבא: $\varphi(t)=e^{\lambda t}$, ומקיים $\varphi^{(k)}=\lambda^k e^{\lambda t}$.

אם נציב φ במשוואה נקבל:

$$e^{\lambda t}(\lambda^n+\lambda^{n-1}a_1+\dots+a_n)\overset{?}{=}0$$

רק אם λ שורש של הפולינום $\sum_{i=0}^{n}a_iX^{n-i}$ והוא יקרא הפולינום האופייני, $p(\lambda)$

אם נמצא λ שהוא השורש של הפולינום אז זה $e^{\lambda t}$ יהיה פתרון.

זה בעיה
למצוא שורשים
[illegible] שלנו

מקרה קל: נניח ה הפולינום האופייני מתפרק מעל $\mathbb{R}$ לשורשים שונים

$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, כלומר כולם שונים. $p(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$

אז ניקח את $e^{\lambda_i t}$ להיות פתרונות שלנו.

כלומר נקבל n פתרונות שונים $\varphi_i(t)=e^{\lambda_i t}$. צריך לבדוק שהם בת"ל ואז זה יהיה בסיס.

הקורס נהיה
פשוט לינארית
אחת...
וזה נפלא
לא ביאלי

טענה: אם $\lambda_i\neq\lambda_j$ אז הפונקציות $\{\varphi_i(t)=e^{\lambda_i t}\}_{i=1}^{n}$ בת"ל לינארית ולכן בסיס של V!

ואכן מתקיים

$$\det W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=\det\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t}\\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}\end{vmatrix}=\underbrace{e^{\lambda_1+\dots+\lambda_n}}_{\text{לא שווה אפס.}}\underbrace{\begin{vmatrix}1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2\\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}}_{\text{זה דטרמיננטת ואן-דר-מונדה}}\neq0$$

מוכר, עבור שלנו אחד הוא שווה $\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)\neq0$ ולכן ~~[illegible]~~ ורונסקיאן הפיכה ולכן הם פונ' בלתי תלויות לינארית.

27/3/14

תרגול שבוע 6

תזכורת:

משפט ההשוואה

אם יש לנו מערכת משוואות
$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x)\\ \dot{y}=g(t,y)\end{cases}$$
ויש לנו תנאי התחלה משותף $x(t_0)=y(t_0)$

אם מתקיים $f(t,x)<g(t,y)$ לכל t, אז לכל $t>t_0$ יתקיים $y(t)>x(t)$

אינטואיציה: הם מתחילים בנקודה, ושל הנגזרת גדולה יותר לכן לא יפגשו שוב לעולם

דוגמא:

$\dot{x}=t\sin(xt)$ ונרצה להעריך את הפתרון למ״ד הזו עם תנאי התחלה $x(0)=0$. אז נסמן $f(t,x)=t\sin(xt)$ לכן! $-t\le t\sin(tx)\le t$.

נמצא פתרונות עבור: $\dot{z}=t$, $z(0)=0$! $\begin{cases}\dot{y}=-t\\ y(0)=0\end{cases} \rightarrow y=\frac{-t^2}{2}$

$z=\frac{t^2}{2}$

לכן ממשפט ההשוואה נקבל $-\frac{t^2}{2}\le x(t)\le \frac{t^2}{2}$ [השוואה פעמיים]

יש גרסא למשפט גם עבור גדול שווה

וזו הערכה לפתרון, שאותו לא יודעים למצוא.

תרגיל: העריכו את הפתרון עבור
$$\begin{cases}\dot{x}=t\sin xt\\ x(1)=1\end{cases}$$

כבמקרה הקודם:

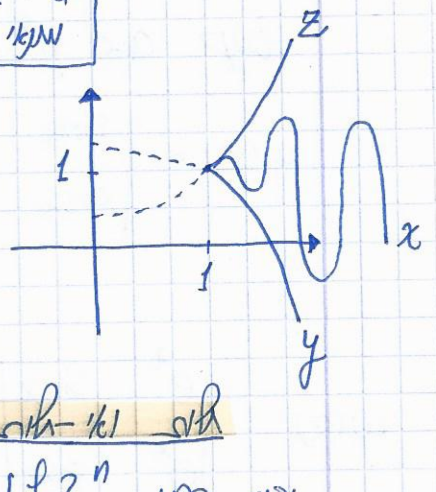
$$-t\le t\sin xt\le t$$

$\boxed{y=\frac{-t^2}{2}+\frac{3}{2}}$ מתנאי התחלה

$\boxed{z=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}}$ מתנאי התחלה

לכן!
$$-\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\le x(t)\le \frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$$

לא ברור מה הקשר בין התרגיל הזה לתרגיל הקודם...



תלות ואי-תלות לינארית של פונקציות

עבור הפונ׳ $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ על פני הקטע $[a,b]$ תקרא תלויה לינארית אם קיימים $C_1,\dots,C_n$ קבועים כשלא כולם אפס, כך ש $0=\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(t)$ לכל $t\in[a,b]$, כלומר פונ׳ האפס זהותית בכל הקטע.

אחרת הן תקראנה בלתי תלויות לינארית.

ורונסקיאן: Wronskian

עבור פונ׳ $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ נגדיר את הוורונסקיאן להיות

פונ׳ של נקודה בקטע

$$W(x)=\det\begin{vmatrix}\varphi_1(x)\dots\varphi_n(x)\\ \varphi_1'(x)\dots\varphi_n'(x)\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x)\dots\varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

כלומר לכל n פונ׳, נגדיר פונ׳ שבכל נקודה, תחזיר את הדטרמיננטה של המטריצה הזו בנקודה המתאימה.

27/3/14

המשך תרגול 6

טענה:

1) אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ שגזירות ברציפות n-1 פעמים ותלויות ליניארית בקטע $[a,b]$ אז $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t)=0$ לכל $t\in[a,b]$, כלומר, פונ' האפס בקטע. לכן אם יש נקודה שבה הוא לא אפס אז הן לא תלויות ליניארית [הכיוון ההפוך לא נכון]

2) בהינתן משוואה ליניארית הומוגנית שמקיימת את תנאי משפט קיום ויחידות בקטע $[a,b]$, ובהינתן n פתרונות שלה $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ שעבורם מתקיים $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x_0)=0$ עבור x_0 כלשהי בקטע, אז הפתרונות תלויים ליניארית בקטע הנ"ל, ובפרט $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x)=0$ לכל x בקטע.

זה הכיוון ההפוך, אבל רק לפתרונות למד"ר הומוגנית

מסקנה: בהינתן מד"ר ליניארית הומוגנית המקיימת את תנאי משפט $\exists!$ בקטע $[a,b]$. אז n פתרונות שלה $y_1,\dots,y_n$ מהווים בסיס למרחב הפתרונות אמ"מ $W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\neq 0$ עבור x_0 כלשהו בקטע.

אינטו...

תרגיל: בדקו תלות ליניארית:

א) $\sin x, \cos x$. אם $a\sin x+b\cos x\equiv 0$. אם $b\neq 0$ אז $\tan x\equiv const$ בקטע כלשהו וזה סתירה. לכן $b=0$, לכן $a=0$ קיבלנו.

הדרך השנייה...

מצד שני:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

לכן הן לא תלויות ליניארית, כי אין קטע שבו זה מתאפס.

ב) $e^x, \sin x$:

$$W(x)\begin{vmatrix}e^x & \sin x\\ e^x & \cos x\end{vmatrix}=e^x(\cos x-\sin x)$$

מתאפס בנקודות מבודדות! לכן אין קטע שבו הוא מתאפס ולכן הן לא תלויות ליניארית.

ג) $\sin^2x, \cos^2x, 1$; אז ברור שיש תלות ליניארית... $\sin^2x+\cos^2x-1=0$

$$\begin{vmatrix}\sin^2x & \cos^2x & 1\\ 2\sin x\cos x & -2\sin x\cos x & 0\\ 2\cos^2x-2\sin^2x & -2\cos^2x+2\sin^2x & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin^2x & \cos^2x & 1\\ \sin 2x & -\sin 2x & 0\\ 2\cos 2x & -2\cos 2x & 0\end{vmatrix}=0$$

ואכן נקבל

אז הוורונסקיאן אכן אפס. זה לא אומר שהן תלויות ליניארית, זה רק מראה שהמשפט נכון...

27/3/14

המשך תרגול 6

תרגיל: מצא מד"ר ליניארית מסדר II עבורה $y_1 = \sin x$; $y_2 = e^x$ שני פתרונות יסודיים.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} \sin x & e^x & y \\ \cos x & e^x & \dot{y} \\ -\sin x & e^x & \ddot{y} \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \ddot{y}\left(e^x(\sin x - \cos x)\right) - \dot{y}\left(e^x(2\sin x)\right) + y e^x(\cos x + \sin x) = 0$$

זו מד"ר ליניארית מסדר 2 שאלו הפתרונות היסודיים שלה, כנדרש.

אם $\sin x$, e^x אכן פותרים את כל הפתרונות, לכן שלושת הפונ' האלו יהיו חייבות להיות תלויות ליניארית ונקבל מד"ר ליניארית מסדר 2 על y, פתרון כללי.