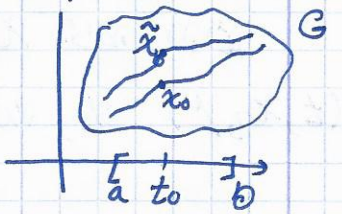
19/3/14

שיעור שבוע 5

<u>מסקנה:</u> נוכיח את רציפה של הפתרון בתנאי התחלה, כשימוש באי"ש האינטגרלי!

כלומר נתונה לנו מד"ר $\dot{x}=f(t,x)$ שמקיימת תנאי משפט $\exists!$ ויש לנו תנאי התחלה $x(t_0)=x_0$, ונסמן הפתרון $\varphi(t)$, כך שהוא מוגדר על קומפקט $[a,b]$, אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|\tilde{x}_0-x_0|<\delta$ אז הפתרון $\hat{\varphi}(t)$ לבעיית קושי עם $\dot{x}=f(t,x)$! $\hat{\varphi}(t_0)=\tilde{x}$ מקיים:

(א) $\hat{\varphi}$ מוגדר על כל $[a,b]$ (ב) לכל $t\in[a,b]$ מתקיים $|\hat{\varphi}(t)-\varphi(t)|\le\varepsilon$



<u>הוכחה:</u> נגדיר $k=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} t\in[a,b] \\ |\varphi(t)-x|\le\varepsilon \end{array}\right\}$ כלומר k הוא סביבת ε של הפתרון האמיתי φ.

אם ε מספיק קטן אז $k\subseteq G$, כי k קומפקט והתמונה של φ יש מרחק מהשפה.

נשים לב שמתקיים עבור $\varphi(t)$ הפתרון המקורי

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds$$

לכל $t\in[a,b]$, כי φ פתרון למד"ר.

נסמן $\hat{\varphi}(t)$ הפתרון עם התנאי $\hat{\varphi}(t_0)=\hat{x}_0$ אז מתקיים

$$\hat{\varphi}(t)=\hat{x}_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\hat{\varphi}(s))ds$$

כזכור k קומפקטית, ומהתנאי $\frac{\partial f}{\partial x}\in C(G)$

לכן חסומה על k, כלומר קיים M כך ש $M>\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|$ לכל $(t,x)\in k$

לכן $M|x_1-x_2|\ge|f(t,x_1)-f(t,x_2)|$ כאשר $(t,x_1),(t,x_2)\in k$

לכן מתקיים:

$$\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)=x_0-\hat{x}_0+\int_{t_0}^{t}\left(f(s,\varphi(s))-f(s,\hat{\varphi}(s))\right)ds$$

לכן מא"ש משולש

$$|\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)|\overset{\triangle}{\le}|x_0-\hat{x}_0|+\left|\int_{t_0}^{t}\left|f(s,\varphi(s))-f(s,\hat{\varphi}(s))\right|ds\right|\le$$

$$\le\underbrace{|x_0-\hat{x}_0|}_{\le\delta}+\int_{t_0}^{t}L|\varphi(s)-\hat{\varphi}(s)|ds$$

לכן אפשר להשתמש בא"ש gronwall

כלומר א"ש אינטגרלי. נסמן $w(t)=|\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)|$ המקיימת

$$w(t)\le\delta+L\int_{t_0}^{t}w(s)ds$$

לכן!

$$w(t)\le\delta e^{L|t-t_0|}\le\delta e^{L|b-a|}$$

לכן נבחר δ קטן מספיק כדי שיתקיים $\delta e^{L|b-a|}\le\varepsilon$ וכך נסיים, כלומר הפתרון קרוב עד כדי ε בכל $[a,b]$, והפתרון מוגדר בכל $[a,b]$, כי לא משתפוצץ לאינסוף, ולכן יברח מהקומפקט בשלמות.

חשוב שהקצה חסום...

מושג בריחה מקומפקט

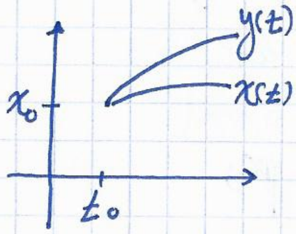
19/3/14

המשך שיעור 5

הערה: ישנה רציפות מתקיימת לא רק ביחס לתנאי התחלה, אלא גם ביחס למד"ר עצמה, כלומר לפונ' f הרציפה שלנו. למשל אם $\dot{x}=f(x,t,\mu)$ כאשר μ פרמטר למשוואה, ו-f רציפה בשלושת המשתנים, בפרט ביחס ל-μ אז בהינתן תנאי התחלה $x(t_0)=x_0$ נקבל פתרון, הפתרון הוא x והוא פונ' של (t,x_0,μ) והמשפט אומר שהתלות ב-μ רציפה; כמו שהתלות ב-x_0 רציפה הראנו.
בנוסף אם $f(t,x,\mu)$ גזירה מספיק פעמים, נניח k פעמים, אז $x(t,x_0,\mu)$ גזירה k פעמים ברציפות.

משפטי השוואה

(I) נניח ויש שני מד"ר $\underset{(I)}{\dot{x}=f(t,x)}$, ומשוואה נוספת $\underset{(II)}{\dot{y}=F(t,y)}$ שהיא כנראה פשוטה יותר לפתרון.



נבחר נקודת התחלה משותפת $t_0=a$. אז נתבונן ב-$t>a$.
נניח שלכל $t>a$ מתקיים $f(t,x)<F(t,x)$.
נסמן $x(t)$, $y(t)$ פתרונות ל-I,II בעלי תנאי התחלה
$x(t_0)=y(t_0)=x_0$, אז מתקיים שלכל $t>a$: $x(t)<y(t)$

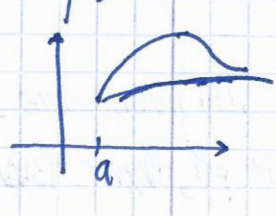
למה: אם $\varphi(t)$ גזירה ברציפות לכל $t\ge a$ ו-$\varphi(t)\ge 0$ בסביבה של a ו-$\varphi(a)=0$ אז $\varphi'(a)\ge 0$.

למה: אם $\varphi(t)$ גזירה ברציפות לכל $t\le t_1$ ומקיימת $\varphi(t)\ge 0$ בסביבת t_1 ו-$\varphi(t_1)=0$ אז $0\ge\varphi'(t_1)$.

הוכחה: ניקח $\varphi(t)=y(t)-x(t)$, נ"ל אם מישהו יהיה שוויון ביניהם אז ההפרש יתאפס לכן מהלמה הנגזרת תהיה חיובית שזה שלילי בעצם, אבל היא תמיד חיובית מההנחה.

(II) נתון $\dot{x}=f(t,x)$; $\dot{y}=F(t,y)$ ונניח כי $f(t,x)\le F(t,x)$ לכל $t\ge a$.

נסמן $x(t)$, $y(t)$ פתרונות כמו קודם המקיימים את תנאי ההתחלה $x(t_0)=y(t_0)=x_0$
אז מתקיים לכל $a\le t$ ש-$y(t)\ge x(t)$.
יותר מכך, אם קיים t_1 כך ש-$y(t_1)=x(t_1)$ כך ש-$a<t_1$ אז
$x(t)\equiv y(t)$ לכל $t\in(a,t_1)$.



19/3/14

המשך שיעור 5

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת נקודה t^* כך ש $x(t^*) > y(t^*)$.

~~נגדיר~~ נבחר שמקיים $x(\hat{t}) = y(\hat{t})$

ונסמן ב $\hat{x}$. אז מקיים

$$x(t) = \hat{x} + \int_{\hat{t}}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

$$y(t) = \hat{x} + \int_{\hat{t}}^{t} F(s, y(s))\,ds$$

כי שניהם מקיימים את המד"ר...

סימון:

$$\hat{t} = \inf\left\{t : \begin{array}{l}\varphi(x) < 0 \\ \text{לכל } x \in [t, t^*]\end{array}\right\}$$

כלומר הזמן התחתון של הסביבה בה ההפרש שלילי,

$$\varphi = y - x$$

נחסר מהמשוואות ונקבל:

$$\underbrace{x(t) - y(t)}_{w(t)} = \int_{\hat{t}}^{t} f(s, x(s))\,ds - F(s, y(s))\,ds$$

אז לכל $t \in [\hat{t}, t^*]$ יתקיים

$$0 \le w(t) = \int_{\hat{t}}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s)) + \underbrace{\big(f(s, y(s)) - F(s, y(s))\big)}_{\le 0}\,ds$$

הנתון מהמשפט

לכן

$$0 \le w(t) \le \int_{\hat{t}}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))\,ds$$

ומשום ש f מקיימת תנאי ליפשיץ נקבל

$$\le L \int_{\hat{t}}^{t} x(s) - y(s)\,ds \xrightarrow[\text{Gronwall}]{\text{מקרה פרטי של}} w \le 0 \longrightarrow w \equiv 0$$

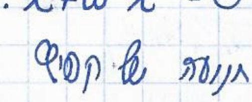
אפשר להוציא הערך המוחלט כי הסימן מוגדר.

לכן $x(t) \equiv y(t)$ לכל $t \in [\hat{t}, t^*]$

לכן זו סתירה להנחה, לכן לא יכול להיות $x > y$.

משוואות ליניאריות של סדר גבוה: [נושא חדש]

דוגמא: $x(t)$ פונ' נעלמת, ויש לנו משוואה מהצורה $\ddot{x} + w^2 x = 0$. w נקרא תדירות, למשל $m\ddot{x} = -kx$ המשוואת תנועה של קפיץ



ואז $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ וזו משוואה של סדר שני.

ראינו בעבר, שאפשר לעבור באופן שקול למערכת משוואות

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -w^2 x \end{cases}$$

וראינו שלמערכת הזו יש חוק שימור שזה למעשה חוק שימור האנרגיה, כאשר

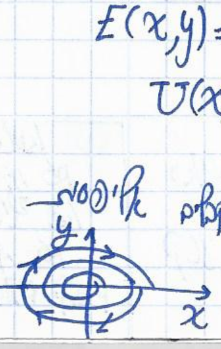
$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

$$U(x) = -\int f(x)\,dx$$

ולכן במקרה שלנו $U(x) = \frac{w^2 x^2}{2}$.

לכן לכל x, y פתרונות למערכת נקבל $E \equiv Const$ ← חוק שימור.

לכן מקבלים אליפסות



אבל עדיין לא פתרנו את x כתלות ב t! רק x כתלות ב y...

19/3/14

המשך שיעור 3

אז איך x תלוי ב-t?

כזכור $y=\dot{x}$, ולכן מחוק שימור נקבל $\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{w^2x^2}{2}=E$, ולכן $\dot{x}=\sqrt{2E-\frac{w^2x^2}{2}}$

וזו משוואה אוטונומית שאפשר לפתור:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2E-\frac{w^2x^2}{2}}}=t+Const$$

פתרון ע"י הפרדת משתנים.

$$\frac{1}{\sqrt{2E}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{2E}x^2}}=t+Const \xrightarrow[\text{משתנה}]{\text{החלפת}} \frac{1}{w}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=t+Const$$

ולכן $\frac{1}{w}\arcsin(z)=t+Const \leftarrow \arcsin(z)=wt+C_1$

ולכן $\frac{wx}{\sqrt{2E}}=z=\sin(wt+C_1)$

לסיכום: $x=\frac{\sin(wt+C_1)}{w}\sqrt{2E}$ ול-$\frac{\sqrt{2E}}{w}$ קוראים אמפליטודה.

אז מצאנו פתרון מחזורי של תנועת הקפיץ, המיקום כתלות בזמן בכל רגע נתון.

ול-w קוראים תדירות כי המחזור של הפונ' הוא $\frac{2\pi}{w}$. ול-C_1 קוראים הפאזה.

<u>תזכורות:</u> [טריגו ומרוכבים]

אם $f(t)=A\sin(wt+\alpha)$ אז $f(t)=A(\sin wt\cos\alpha+\cos wt\sin\alpha)$ ולכן

$f(t)=P\sin wt+Q\cos wt$ ולכן $f(t)=P\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}+Q\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}$ ← שהפיזיקאים אוהבים...

הבאתי הסבר למי שלא יודע מרוכבים מה זה אקספוננט של מספר מרוכב...

ולכן אפשר לקבל $f(t)=\tilde{P}e^{iwt}+\tilde{Q}e^{-iwt}$

וזה דרך אחת נוספת להבין משוואת תנועה הרמונית רגילה.

$$P\cos wt+Q\sin wt=\sqrt{P^2+Q^2}\left(\underbrace{\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\cos wt+\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\sin wt}_{\text{נקודה במעגל היחידה}}\right) \quad \Theta$$

יש כאן דוגמא של קפיץ.

<u>הגדרה:</u> משוואה לינארית מסדר n היא משוואה דיפרנציאלית מהצורה

$$x^{(n)}+a_n(t)x^{(n-1)}+\dots+a_1(t)x=b(t)$$

כאשר $a_i(t)$ נקראים המקדמים, ואנחנו נניח ש-a_i רציפים לכל t ב-(a,b) קטע פתוח. אם $b(t)\equiv 0$ זו נקראת <u>משוואה לינארית הומוגנית.</u>

הדוגמא שראינו עם הקפיץ היא הומוגנית עם מקדמים קבועים

19/3/14

המשך שיעור 5

<u>הגדרה:</u> משוואה נקראת בעלת מקדמים קבועים אם $a_i(t) \equiv c_i$ ו- $c_i \in \mathbb{R}$.

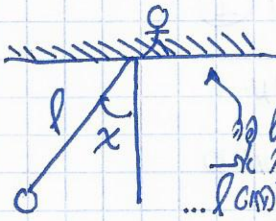
<u>משוואה הומוגנית:</u> תהי משוואה $\sum_{i=0}^{n} x^{(i)} a_i(t) = 0$ הומוגנית מסדר n. אזי מתקיים:

(א) כל פתרון של המשוואה יהיה מוגדר על כל הקטע (a,b), כלומר על כל הקטע שבו המקדמים רציפים. [הפתרון לא בורח לאינסוף בתוך תחום ההגדרה]

(ב) נסמן ב-V את קבוצת הפתרונות של המשוואה, אזי V מרחב וקטורי ממימד סופי, n, הסדר של המשוואה. לכן קיימים n פתרונות בסיסיים $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ שפורשים את כל V והם בת"ל.

<u>דוגמא</u>

$$\ddot{x} + w^2(t)x = 0$$



האיש פה משנה את אורך החוט l...

ולכן w זו פונ' של אורך החוט המשתנה...

היאלי סיפור חיים של נדנדה ביפאן... :)

(ג) בדוגמא של הקפיץ: הפתרונות היסודיים הם $\cos wt$ ו- $\sin wt$ שפורשים את כל הפתרונות כפי שראינו. אבל גם הבסיס $\frac{e^{iwt}}{2}, \frac{e^{-iwt}}{2}$ פורש את מרחב הפתרונות. [אפשר לחשוב על V כמעל $\mathbb{C}$, כלומר המשוואות מרוכבות]

זה פשוט מעבר בסיסים

20/3/14

שיעור 6

(ג) כרגע אנחנו מסתכלים על משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר n שהיא מהצורה $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$ כאשר $a_i(t)$ פונ' רציפה בקטע (a,b) והן נקראות המקדמים. נסמן ב-V את קבוצת כל הפתרונות למשוואה, הבירור מתקיים $V \subseteq C^n[a,b]$ כי הם חייבים להיות גזירים ברציפות n פעמים לפחות.

<u>תזכורת:</u> אם $\{f_i\}_{i=1}^{k}$ פונ' נקראות בת"ל אם לכל $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(t) \equiv 0$, כלומר פונ' האפס, מתקיים $\alpha_i \equiv 0$ לכל i.

באותו אופן הפונ' תלויות ליניארית בקטע $[a,b]$ אם קיים צירוף שאינו טריוויאלי שהוא פונ' האפס בהגבלה על הקטע.

<u>טענה: V מרחב וקטורי:</u> נבדוק סגירות לחיבור וכפל בסקלר. זה טריוויאלי. אם $x(t),y(t) \in V$ אז $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)} = 0 = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)}$ נחבר את שתי המשוואות ונקבל

$$\sum_{i=0}^{n} (x+y)^{(i)} a_i(t) = 0 \longrightarrow (x+y) \in V$$

כנ"ל לגבי כפל בסקלר...

20/3/14 המשך שיעור 5

יהי $V\subseteq C^n$ תת-מרחב ליניארי. מרחב הפונ' הגזירות ברציפות n פעמים הוא אינסוף מימדי. אנחנו נראה ש V הוא סוף ממדי.

טענה: $\dim V = n$, כאשר n זה הסדר של המשוואה.

(I) משפט קיום ויחידות למשוואה מסדר n כללי. תהי משוואה מסדר n מהצורה $x^{(n)}=F(t,x,\dot{x},\dots,x^{(n-1)})$ ו- $F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$. [זה משוואה כללית! כלומר לאו דווקא ליניארית] נניח F רציפה בתחום G כלשהו $G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ ובנוסף $\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}$ רציפות ב G. כעת נרצה להגדיר תנאי התחלה למשוואה שלנו, והם יהיו $(t_0,x_1(0),\dots,x_n(0))\in G$ ובעיית קושי היא למצוא פתרון למד"ר שמקיים את תנאי ההתחלה שהגדרנו שם. כלומר פתרון x יקיים $x(t_0)=x_1(0)$, $\dot{x}(t_0)=x_2(0)$ וכך הלאה...

אז המשפט אומר שאם F רציפה וגם $\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}$ רציפות, אז לכל תנאי התחלה כפי שהגדרנו לעיל, קיימת סביבה של t_0 ופתרון $x(t)$ המוגדר בסביבת t_0 שמקיים את המד"ר ותנאי ההתחלה. אם x, y שני פתרונות שלה המקיימים תנאי התחלה והמד"ר, אז הם מתלכדים בסביבה הנ"ל, ואפילו בתחום ההגדרה המשותף.

הוכחה: נהפוך משוואה מסדר n להיות מערכת של n משוואות. נסמן $x_n(t)=x^{(n-1)}(t)$ כלומר כעת יש לנו n משוואות חדשות ופונ' נעלמות.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=F(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases}$$

זו מערכת חדשה ששקולה למשוואה מסדר n. ופה מתקבלת שהפונ' הנעלמות שלנו שונות. מערכת כזו שהיא מד"ר מסדר 1, ולמערכת כזו אנחנו כבר יודעים את משפט קיום ויחידות.

דרך כללית למערכת הזו היא $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(t,x_1,\dots,x_n)$ זה שקול, פשוט הצבנו את הפתרים בתוך וקטורים ונפרש שוויון קורדינאטה קורדינאטה.

הוכחנו רק למשוואה אחת, אבל ההוכחה למערכת היא פשוטה

משפט: ← בנוסף אם $|\vec{f}(t,\vec{x})|\le A(t)|\vec{x}|+B(t)$ לכל $t\in(a,b)$ אז כל פתרון של בעיה תנאי התחלה אפשר להגדיר בכל הקטע (a,b)

הוכחנו למשוואה חופשי, זה נכון גם למערכת

20/3/14

המשך שיעור 5

במקרה עבור ~~[illegible]~~ משוואה מסדר n לינארית נקבל המערכת

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_1(t)x_n - \dots - a_n(t)x_1 \end{cases}$$

זו המערכת השקולה למד"ר לינארית מסדר n. או לחלופין אפשר לקבל המערכת

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \boxed{= \vec{f}(t,\vec{x})}$$

מערכת משוואות לינאריות

כאשר $A(t)$ המטריצה המצורפת של הפולינום הדיפ' הלינארי, כלומר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

לכן המערכת שלנו מקיימת את תנאי משפט ההרחבה לכל תחום ההגדרה כי קיבלנו

$$|\vec{f}(t,\vec{x})| \le \|A(t)\| |\vec{x}|$$

נורמה של המטריצה, בהיותה רציפה.

לכן המערכת שלנו מקיימת התנאי, לכן אפשר להרחיב הפתרון לכל תחום ההגדרה של המקדמים.

⊖ עכשיו נשתמש במשפט הקיום והיחידות להוכחת הטענה ש $\dim V = n$.

<u>הוכחה:</u> נבנה איזומורפיזם בין V ל-$\mathbb{R}^n$. נסמן φ_{t_0} האיזומורפיזם מ-V_0 ל-$\mathbb{R}^n$.

אז לכל $\psi \in V$ נתאים $\varphi_{t_0}(\psi) = $ (וקטור תנאי התחלה בנקודה t_0) כלומר יתקיים $\varphi_{t_0}(\psi) = (\psi(t_0), \dot{\psi}(t_0), \dots, \psi^{(n-1)}(t_0))$. צריך להוכיח ש-$\varphi_{t_0}$ הומומורפיזם חח"ע ועל.

זה יותר חזק מהמשפט. זה אלטרנטיבה מראה בנייה לבסיס ב-V

⊖ φ_{t_0} הומומורפיזם, ברור שהוא שומר חיבור וכפל, זה נובע מתכונות של נגזרת של חיבור וכו'.

⊖ נתבונן ב-$\ker\varphi_{t_0}$. אז הפתרון הטריוויאלי $x \equiv 0$ שייך לו. והאם האפס ב-V הוא היחיד שייך ל-$\ker\varphi_{t_0}$? אם יש עוד $\psi \in \ker\varphi_{t_0}$ אז הוא מקיים תנאי התחלה של פתרון האפס, לכן ממשפט יחידות הוא שווה בהכרח לפתרון האפס! לכן $\ker\varphi_{t_0} = \{0\}$ ולכן φ_{t_0} חח"ע.

⊖ צ"ל ש-φ_{t_0} על. וזה ברור ממשפט קיום! לכל אוסף של תנאי התחלה קיים פתרון שמקיים את התנאים האלה והוא יהיה המקור. לכן φ_{t_0} על.

לכן $\dim V = n$ כנדרש.

20/3/14

תרגול שיעור 2

משוואות ניוטון:

זו משוואה מהצורה $\ddot{x}=f(x)$, כאשר נגזור שנייה מיקום של חלקיק בזמן t; ו-$f(x)$ זה כח הפועל על החלקיק כתלות במיקום שלו.

כאמור ניתן להעביר את זה למערכת של משוואות מסדר 1 ומקבלים

מערכת של משוואות מסדר 1
$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=f(x)\end{cases}$$

נשים לב שזו מערכת מדויקת; $y\not\equiv 0$ כי אחרת x קבוע וזה לא מעניין.

ונקבל $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{y}$ ונסמן $P=-f(x)$, $Q=y$

ומתקיים $\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x}$ לכן המשוואה מדויקת.

לכן קיים H חוק שימור למערכת שמקיים $\frac{\partial H}{\partial x}=P$, $\frac{\partial H}{\partial y}=Q$

לכן: $H=\frac{y^2}{2}-\int f(x)dx$ לכן לכל x,y פתרונות למערכת מתקיים

$$Const\equiv\frac{y^2}{2}\underbrace{-\int f(x)dx}_{\text{הקבועה}} \longrightarrow \frac{y^2}{2}+U(x)=Const$$

הגדרה: $U(x)$ נקרא האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח f [הפוטנציאל אשר במיקום] לכן המשוואה המקורית שקולה ל:

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\frac{\partial U}{\partial x}\end{cases}$$

והפתרונות למערכת נמצאים על קווי הגובה של

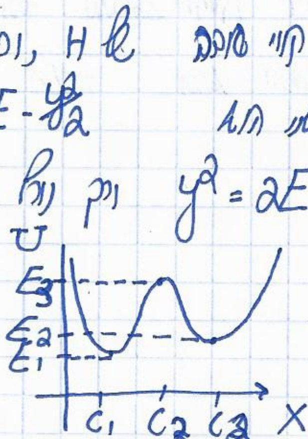
$$E=\frac{y^2}{2}+U(x)$$

כאשר E נקראת האנרגיה הכוללת של המערכת; $\frac{y^2}{2}$ נקראת האנרגיה הקינטית [$y=\dot{x}$ כלומר המהירות] האנרגיה הכוללת של המערכת, מתפצלת בין הפונקציות השונות, ונשארת קבועה עבור כל פתרון ספציפי.

E זה הקבוע למערכת ← היינו רוצים לשרטט קווי גובה של H, וכך להבין איך נראים פתרונות x,y.

כבר החוק שימור שלנו הוא $U(x)=E-\frac{y^2}{2}$ לכן $E\geq U(x)$.

כמו כן $y^2=2E-2U(x)$ וכך נוכל לקבל את הקשר בין x ל-y.



נניח! U מהצורה

בנקודות c_i מתקיים $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{c_i}=0$ כי זה קיצון לכן מהמערכת נקבל $\dot{y}$ שמתאפס בנקודה זו.

לכן יש לנו פתרונות של $(c_i,0)$ המתאימים ל-E_1,E_2,E_3!

20/3/14

המשך שיעור 2

עבור קווי גובה $E<U$ אין פתרונות כי y יצא מרוכב.

לאומר $E<E_1$

לאומר אין משמעות לקו גובה המתאים! $E<U$ כי אין ציור.

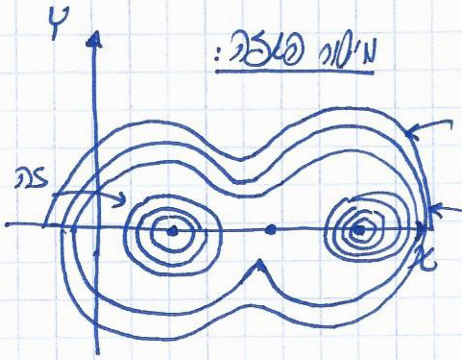
לכן אם ניקח קו גובה $E_1<E<E_2$ אז נתעניין רק בתחום $G_1<x<G_3$.

כאמור ראינו $y=\pm\sqrt{2(E-U(x))}$

מה אנחנו עושים? מחפשים קווי גובה של פונ' השימור שלנו $H(x,y)$.

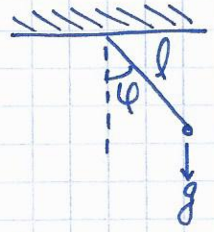
$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+U(x)$ זו חוק השימור שלנו. ואז לכל קבוע E שנבחר $E=\frac{y^2}{2}+U(x)$ יגדיר פתרון שמתאים. ונרצה לצייר לכל ערכי E השונים האפשריים ולמצוא את הקשר בין x ו-y!

מישור הפאזה:



אם ניקח קו גובה מתאים $E_2<E<E_3$, שוב נדרוש $E>U$ ונקבל פתרונות סביב G_3

דוגמא: מטוטלת מתמטית



כאשר $\varphi\in[0,2\pi]$.

המשו"ר היא $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$

(*) **הערה:** כש-φ מספיק קטן $\varphi\approx\sin\varphi$... אפשר להסתפק עם טיילור והזנחת הגורמים הקטנים מאוד. ואז זה כמו משוואת ניוטון.

נסמן $f(\varphi)=\frac{g}{l}\sin\varphi$ והמשוואה היא $\ddot{\varphi}=f(\varphi)$

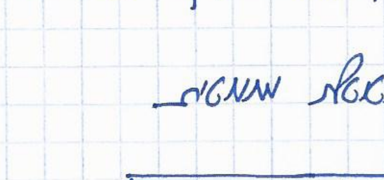
וזו משוואת ניוטון ולכן נגדיר $U(\varphi)=-\int -\frac{g}{l}\sin\varphi\,d\varphi$

ולכן הפוטנציאל יהיה $U(\varphi)=\frac{-g}{l}\cos\varphi+\text{Const}$.

נקבל $\text{Const}=\frac{g}{l}$ שמקרים לנו בהרים [להפוך האם נובע מקירוב $\varphi\approx\sin\varphi$]

לא נקבל $U(\varphi)=\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)$ ולכן $U(\varphi)\geq 0$ לכל φ, ובפרט מחזורי.

אנו רוצים שבאמת הקבוע יהיה $\frac{g}{l}$ והוא יהיה גם קבוע שבו לצורך הגרף



כאמור חוק השימור למשוואה הוא

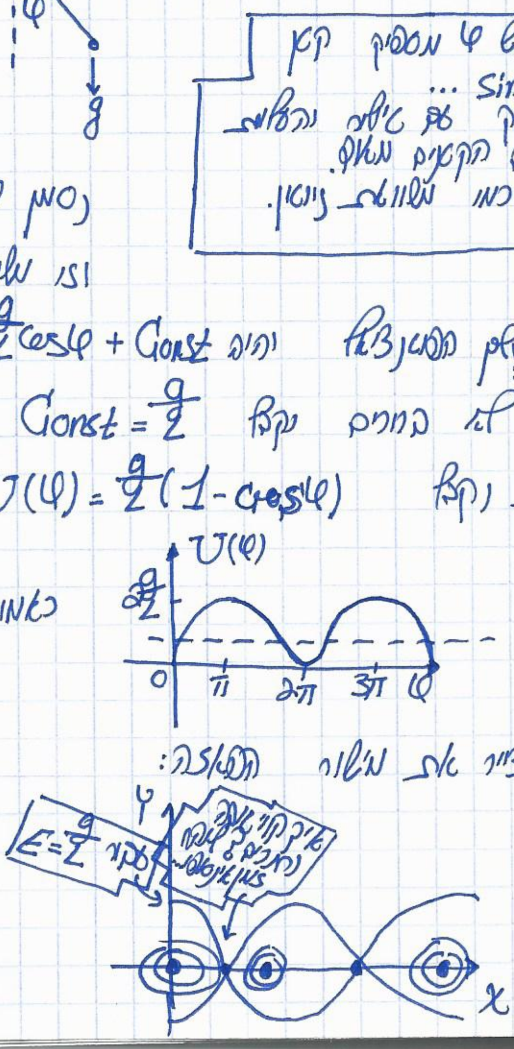
$$E(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)$$

נקודות שבת יהיו $x_*=\pi k$ שהן קיצון של U ולכן $(x_*,0)$ פתרון שבת...

מקיים $y=\pm\sqrt{2E-2U(\varphi)}$

נחלק למקרים: $E<0$ אין קווי גובה... $0\leq E<2g/l$ יש מסלולים סגורים סביב נקודות המינימום $2g/l<E$

נצייר את מישור הפאזה:



סוף מקרה: אם $E=\frac{2g}{l}$

$y=\pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos(\frac{x}{2})$