12/3/14

שיעור שבוע 4

תזכורת: משוואה מדויקת - זו משוואה $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ שהיחס תוכנים עליה בתבנית דיפרנציאלית

$dx\,P(x,y) + dy\,Q(x,y) = 0$, והיא תקרא מדויקת

אם $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. אם המצב כזה קיים אז $P = \frac{\partial H}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial H}{\partial y}$

$H(x, y(x)) = Const!$, כלומר H חוק שימור למערכת. והעקומות H נמצא פתרונות למד"ר בצורת קווי הגובה שלה.

נזכר שכבר שאלנו למערכת $\begin{cases} \dot{y} = -P(x,y) \\ \dot{x} = Q(x,y) \end{cases}$ שהיא מערכת אוטונומית. ואז חוק השימור H יקיים

$H(x(t), y(t)) = Const$

דוגמאות:

1) Lotka-Voltera system - [מודל טורף-נטרף Preadetor-prey model]

$x(t)$ ← כמות הנטרף בזמן t. (נניח שהוא מתרבה מהר.)

$y(t)$ ← כמות הטורף בזמן t. (נניח שהוא מתרבה לאט ולטרוף הקיים.)

מתרבה אקספ' וקטן תלוי בכמות הפעמים שנטרף, כלומר כמות המפגשים

דועך אקספ' עם שטוק טרף קיים...

ומתקיימת המשוואה
$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -ly + bxy \end{cases}$$

כאשר $k,l,a,b > 0$

וגם $x,y \geq 0$. ננסה לפתור בצורה של מד"ר

מיון x ו-y:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\overbrace{ly - bxy}^{P}}{\underbrace{kx - axy}_{Q}}$$

האם המשוואה זו מדויקת?

$\frac{\partial P}{\partial y} = l - bx$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = k - ay$

לא שווה! לא משוואה מדויקת. → באסה... → ננסה להפוך את המשוואה לכזו שכן מדויקת.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{l}{x} - b}{\frac{k}{y} - a}$$

נחלק מונה ומכנה ב-xy (גורם אינטגרציה) ונקבל

וכעת $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ לכן זו משוואה מדויקת,

לכן קיים לה שימור H. נחשב אותו. כלומר צריך שמתקיים

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{l}{x} - b \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{k}{y} - a \end{cases} \xrightarrow{\text{אינטגרציה}} \begin{matrix} H = l \cdot \ln x - bx + G(y) \\ G'(y) = \frac{k}{y} - a \rightarrow G(y) = k\ln y - ay \end{matrix} \rightarrow \boxed{H = l \cdot \ln x - bx + k\ln y - ay}$$

זה חוק שימור. כלומר אם x,y פתרון אז $H(x,y)$ קבוע!

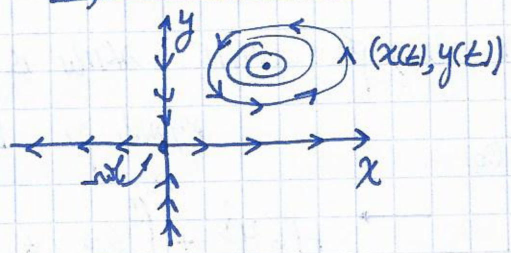
12/3/14

המשך שיעור 4

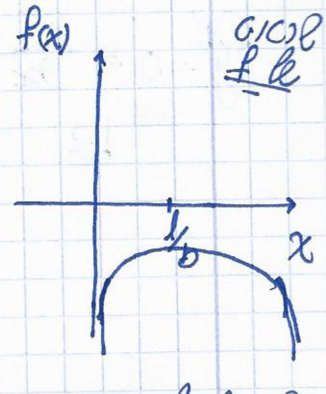
לכן נחפש קווי גובה של H הנ"ל, והפתרונות יהיו מוכלים בהם.

(נגדיר $f(x)=l\cdot\ln x-bx$; $g(y)=k\ln y-ay$

מישור הפאזה לפתרונות



שרטוט של f

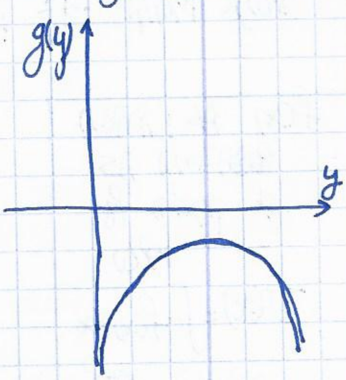


אם ניקח קו גובה יותר מסכום המקסימום נקבל שאין שום פתרון כזה.

אם ניקח קו גובה ששווה בדיוק סכום המקסימום יהיה פתרון יחיד.

אם ניקח קווי גובה נמוכים יותר נקבל איזשהו צורה במישור של פתרונות.

שרטוט של g



נקבל שכל קו גובה שמגדיר פתרון, עבור x קבוע נקבל שיש בדיוק שני ערכי y אפשריים, כי הפונ' f+g חוצה כל קו גובה פעמיים.

מה גילינו? שכל פתרון, לא משנה מאיפה נתחיל, לאחר זמן מסוים (ג"ע חזרה) לאותו מצב התחלתי! כי קווי הגובה מעגליים, והקווים הסגורים לומר אחרת תמיד מקיפים את הקו, ומרכיבים הנקודה לא תהיה נקודה אינסופית של המערכת. המסילה לא עוצרת אף פעם, והמערכת תמיד צריכה מקבע כלשהו כי קו גובה זה קומפקט.

כי נקודת הש"מ מינימום שבה כפי שאנו ...

אז קיבלנו קשר בין y ל-x ונרצה להחליף את $x(t)$! $y(t)$. זה נעשה בעזרת הפונ' הנתונה.

דוגמא נוספת: [החוק השני של ניוטון]

$\ddot{x}=f(x)$; $f(x)$ זה הכוח הפועל על החלקיק [בה"כ $m=1$]

זו משוואה מסדר 2! עוד לא טיפלנו בכאלה. טריק, להחליף למערכת של משוואות, נסמן $\dot{x}=y$ ואז קיבלנו

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=f(x)\end{cases} \xrightarrow{} \text{מערכת מסדר 1.}$$

בנוסף יש לנו $(x(0),y(0))$ התחלתיים. מיקום ומהירות התחלתיים.

נשים לב ש-$(0,0)$ זה פתרון נקודת שבת.

כמו כן אם $y\equiv 0$ או $x\equiv 0$ ניתן פתרון מאוד פשוט, ע"י פתרון המשוואה הש"פ שהיא מאוד פשוטה.

אם $y\equiv 0$ אז x גדל אקספ' (ואם $x\equiv 0$ אז y דועך אקספ')

יש עוד נקודת שבת

$y=\frac{k}{a}$

$x=\frac{l}{b}$

כדבריו מהשבת קיום ויחידות קווי פאזה שונים לא יכולים להיחתך במערכת אוטונומית, כי אחרת הם היו דרכים להיפגש מהיחידות.

זה נותן קשר בין x ו-y!

מישור הפאזה:

למערכת

$$\begin{cases}\dot{x}=-P(x,y)\\ \dot{y}=+Q(x,y)\end{cases}$$

לכל פתרון $x(t),y(t)$ נצייר את המסילה $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ ב-$\mathbb{R}^2$ וזה מישור הפאזה.

12/3/14

המשך שיעור 4

המשך דוגמא: זו מערכת אוטונומית [לא תלויה ב t מפורש] לכן נכתוב

$$\begin{cases} \dot y = -(-f(x)) \\ \dot x = y \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\overset{P}{-f(x)}}{\underset{Q}{y}}$$; האם זו משוואה מדויקת?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

כן!

אז זו משוואה מדויקת ולכן נחפש חוק שימור $H(x,y)$ כך שמקיים

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -f(x) \\ \frac{\partial H}{\partial y} = y \end{cases} \longrightarrow H = \frac{y^2}{2} + \underbrace{\int_0^x -f(t)\,dt}_{\text{קבועה.}}$$

לכן H זו תהיה חוק שימור שמערכת. נתעניין בקווי הגובה. ? $\frac{y^2}{2}$ הוא אנרגיה קינטית, המהירות בריבוע חלקי 2.

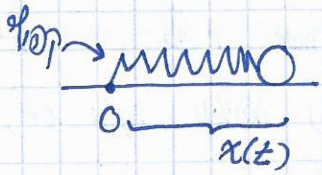
ולכן קיבלנו את חוק שימור האנרגיה!

$$H(x,y) = \underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{U(x)}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}} = Const$$

הערה: אם $f(x)$ זה הכוח הפועל על החלקיק אז נגדיר $U(x)=\int -f(x)dx$ להיות האנרגיה הפוטנציאלית כתלות במיקום. (עד כדי קבוע)

מהם קווי הגובה של H?

מקרה מעניין:

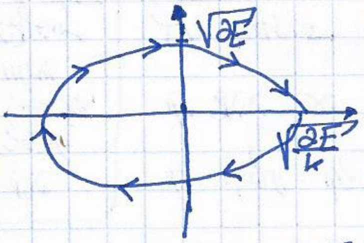


$f(x)=-kx$! אז $U(x)=\int_0^x kt\,dt = \frac{kx^2}{2}$. לכן חוק שימור האנרגיה הוא

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \leftarrow \text{קבוע}$$

לכן $y^2 + kx^2 = 2E \longrightarrow$ זה אליפסה!

$$\frac{y^2}{2E} + \frac{kx^2}{2E} = 1$$



את הכיוון הסיבוב נקבל לפי הפיכה הנגזרת בנקודות מסוימות

כל פתרון למערכת x,y יהיה רק שמהווה אליפסה, ובמקום יש נק' שבה $x \equiv y \equiv 0$. לכן פתרונות של משוואה זו הם פונק' מחזוריות, אך בשאלה זו לא קיבלנו במפורש את $x(t), y(t)$ בפרט, רק קיבלנו שהחלקיק נע בין שני תחומים במרחב.

ⓒ עכשיו חוזרים לתאוריה:

נוכיח את משפט הרחבת הפתרון עד שפה של הקומפקט שעליו דיברנו שעבר.

תזכורת: המשפט אומר אם $\dot x = f(t,x)$! $x(t_0)=x_0$! f רציפה ב G ! $(t_0,x_0)\in G$! $k \subseteq G$ קומפקט כך ש $(t_0,x_0)\in k$. נסמן $x(t)$ פתרון בעל תחום הגדרה מקסימלי

12/3/14

המשך שיעור 4

אם (ω_-,ω_+) התחום המקסימלי שעליו אפשר להגדיר פתרון, אז $t\in(\omega_-,\omega_+)$ המשפט אומר שקיים t_2 רגע אחרון שהפתרון בקומפקט, כלומר לכל t כך ש $\omega_+ > t > t_2$ מקיים $(t,x(t))\notin K$. כלומר יש רגע עזיבה לצד הקומפקט... כלומר אפשר להמשיך פתרון שיתקרב לשפה של G.

__הוכחה:__

(I) נניח בשלילה שקיים K שעבורו לא קיים t_2 כזה, לכן קיימת סדרה $t_n\to\omega_+$ כך ש $\{(t_n,x(t_n))\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K$. כיוון ש-$K$ קומפקט. לסדרה $(t_n,x(t_n))$ יש תת"ס מתכנסת כי K קומפקט, לכן בה"כ נניח שהסדרה הנ"ל מתכנסת, אחרת נקח לה תת"ס. לכן $t_n\to\omega_+$! $x(t_n)\to A$ ולכן מסגירות של K נקבל $(\omega_+,A)\in K$.

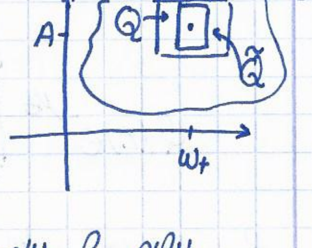
עלינו לכן נראה שמתקיים $\lim_{t\to\omega_+} x(t)=A$, כלומר לא רק שיש סדרה שהגבול הוא A אלא שגבול הפונ' הגבול הוא A.

(II) נראה שאם המצב הוא כמו ב-I אז אפשר להמשיך אותו, וזה יביא לסתירה למקסימליות הפתרון, כי נבחר $(\omega_+,A)\in G$ תנאי התחלה ודרכו אפשר להמשיך את הפתרון מעבר ל-ω_+! ממשפט קיום ויחידות, וההדבקה של ההמשכה עם הפתרון x גזירה כי הנגזרת רציפה כי הגבול קיים, והנגזרות משני הכיוונים קיימות.

ואכן נוכיח את (I) כלומר את הגבול: יהי $\varepsilon>0$ מספיק קטן: $G\supseteq Q=\left\{\begin{matrix}|t-\omega_+|\le\varepsilon\\ |x-A|\le\varepsilon\end{matrix}\right\}$

כלומר Q ריבוע קטן מספיק סביב (ω_+,A) כך שהוא כולו מוכל ב-G. בפרט Q קומפקט, ! f רציפה. נסמן $\tilde M=\max_Q|f|$

וניקח $M>\max(\tilde M,1)$.



נגדיר $\tilde Q$ קופסה קטנה יותר $\tilde Q=\left\{(t,x)\ \middle|\ \begin{matrix}|t-\omega_+|\le\frac{\varepsilon}{2M}\\ |x-A|\le\frac{\varepsilon}{2}\end{matrix}\right\}$

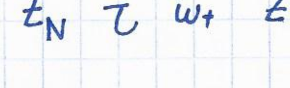
משום ש $t_n\to\omega_+$ אז קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $\tilde Q\ni(t_n,x(t_n))$ כי זו סדרה מתכנסת... [חא"ק 1] נראה שלכל $t>t_N$ מתקיים $(t,x(t))\in Q$ וזה יוכיח את הגבול המבוקש של הפונ'.

נניח בשלילה שלא, אז קיימת נקודה τ כך ש $\tau>t_N$ כך ש $(\tau,x(\tau))\notin Q$ כלומר $|x(\tau)-A|=\varepsilon$ [כלומר מספיק שניקח את פ של השפה...]

$$\frac{|x(t_N)-x(\tau)|}{|t_N-\tau|}\ge\frac{\varepsilon/2}{|t_N-\omega_+|}\ge\frac{\varepsilon/2}{\frac{\varepsilon}{2M}}=M$$

__אז מתקיים:__

$\boxed{\text{כי } x(\tau) \text{ משפה } \tilde Q \text{ ! } \tilde Q\ni x(t_N)!}$



12/3/14

המשך שיעור 4

<u>המשך הוכחה:</u> כזכור x הוא פתרון למד"ר ובפרט C^1 לכן ממשפט לגרנז'

$$M \le \frac{|x(t_N)-x(\tau)|}{|t_N-\tau|} \underset{\text{לגרנז'}}{=} x'(\xi) \underset{\xi\in(t_N,t)}{=} f(\xi, x(\xi)) \underset{(\xi,x(\xi))\in Q}{<} M$$

זו סתירה! ∎

<u>למת אי-שוויון אינטגרלי</u> (Gronwall)

תהי $w(t)$ פונ' רציפה על I ו- $t_0\in I$ ו- $w(t)\ge 0$. נניח כי מתקיים

$$w(t)\le M\left|\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds\right| + \eta$$ אז מתקיים $$w(t)\le \eta e^{M|t-t_0|}$$

למה ערך מוחלט? כי לא בהכרח $t_0<t$

<u>הוכחה:</u>

בה"כ $t\ge t_0$, ברור שהמקרה השני זהה לחלוטין, פשוט הופכים סימן, ויש ערך מוחלט. מתקיים

$$w(t)\le M\underbrace{\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds}_{\varphi(t)}+\eta \xrightarrow[\text{מהמשפט היסודי של החדו"א}]{\text{כזכור ש-}w\text{ רציפה ולכן}} \varphi'(t)\le M\varphi(t)+\eta$$

$$\downarrow$$

$$\varphi'(t)-M\varphi(t)\le\eta$$

נכפול בגורם אינטגרציה, נכפול ב- $0\le e^{-Mt}$ את שני האגפים

$$\underbrace{\varphi'(t)e^{-Mt}-M\varphi(t)e^{-Mt}}_{(\varphi(t)e^{-Mt})'}\le \eta e^{-Mt}$$

נבצע אינטגרל על שני האגפים מ- t_0 עד t

$$\varphi(t)e^{-Mt}\Big|_{t_0}^{t} \le -\frac{\eta e^{-Mt}}{M}\Big|_{t_0}^{t} \longrightarrow \varphi(t)e^{-Mt}-\underbrace{\varphi(t_0)}_{0}e^{-Mt_0}\le\frac{\eta}{M}\left(e^{-Mt_0}-e^{-Mt}\right)$$

ולכן נקבל $\varphi(t)\le\frac{\eta}{M}\left(e^{M(t-t_0)}-1\right)$ נציב בא"ש המקורי. לכן

$$w(t)\le M\varphi(t)+\eta\le \cancel{M}\cdot\frac{\eta}{\cancel{M}}\left(e^{M(t-t_0)}-1\right)+\eta = \eta e^{M(t-t_0)}$$

<u>יש גרסא יותר חזקה לא"ש הזה:</u>

$w(t)\ge0$ ו- $\varphi,\psi\ge0$ אז אם $w(t)\le\varphi(t)+\left|\int_0^t\psi(s)\varphi(s)\,ds\right|$ אז מתקיים

$$w(t)\le\varphi(t)+\left|\int_0^t\varphi(s)\psi(s)e^{\int_s^t\psi(\xi)d\xi}\,ds\right|$$

לא נוכיח את זה.

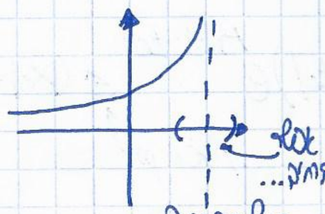
13/3/14

שיעור שבוע 4

שימושים של הג"ש שהראנו אתמול:

<u>דוגמא:</u> $\dot{x} = x^2$

הבעיה היא שאי אפשר לתת פתרון מעבר לנקודת ההתפוצצות המסוימת. הבעיה שאי-אפשר להמשיך פתרון בכל הקטע, באופן...



פה f מוגדרת בכל $\mathbb{R}$ והפתרון לא!

אז מתי כן נוכל להמשיך הפתרון בכל הקטע?

<u>משפט:</u>

אם $\dot{x} = f(t,x)$; f פונ' רציפה על $(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}$ ומקיימת

$|f(t,x)| \le a(t)|x| + b(t)$; כאשר a,b פונ' רציפות וחיוביות על (α,β).

כלומר f חסומה ע"י פונ' אפינית, כלומר לא גדלה ריבועית כמו הדוגמה לעיל.

אז במקרה זה כל פתרון של $\dot{x} = f(t,x)$ ניתן להמשיך אותו לכל הקטע (α,β), כלומר $\omega_+ = \beta$; $\omega_- = \alpha$

כלומר יש לנו פונ' f שמקיימת את התנ"ל על הקטע (α,β) ונרצה שגם הפתרון יהיה מוגדר בכל (α,β)

<u>הוכחה:</u> [שימוש בג"ש]

יהי $x(t)$ פתרון למשוואה עם תנאי התחלה (t_0,x_0) ונסמן (ω_-,ω_+) את תחום ההגדרה המקסימלי של הפתרון המקסימלי! נראה ש $\omega_+ = \beta$, כלומר ניתן להמשיך פתרון לכל הקטע (α,β).

נניח בשלילה ש $\omega_+ < \beta$, אז לפי מסקנה ממשפט הבריחה מקומפקט נקבל ש $\lim_{t\to\omega_+} x(t) = +\infty/-\infty$.

נבחר קטע $[t_0,t_1]$ כך ש $\omega_+ < t_1 < \beta$. פונ' a,b רציפות על $[t_0,t_1]$ ולכן חסומות $|a(t)| \le A$; $|b(t)| \le B$ לכל $t\in[t_0,t_1]$.

לכל $t\in[t_0,\omega_+)$ מתקיים $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$ כי x פתרון ב (ω_-,ω_+)

ומכאן $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$; עשינו אינטגרציה בשני האגפים.

לכן:

$$|x(t)| = \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\right| \overset{\Delta}{\le} |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|\,ds \le$$

$$\le |x_0| + \int_{t_0}^{t} |a(s)|x(s)| + b(s)|\,ds \underset{[t_0,t]\subseteq[t_0,t_1]}{\le} |x_0| + \int_{t_0}^{t} A|x(s)| + B\,ds \le$$

א"ש אינטגרלי כללי

$$|x(t)| \le |x_0| + B|t_1 - t_0| + \int_{t_0}^{t_1} A|x(s)|\,ds \quad ; \quad \omega(t) \overset{def}{=} |x(t)|$$

(נסמן)

$$0 \le \omega(t) \le |x_0| + B|t - t_0| + \int_{t_0}^{t} A\omega(s)\,ds$$

13/3/14

המשך שיעור 4

לכן לפי הנ"ל שהוכחנו נקבל שלכל $t\in[t_0,\omega_+)$ מתקיים

$$w(t)\le(|x_0|+B|t-t_0|)e^{A|t-t_0|}\le(|x_0|+B|t_1-t_0|)e^{A|t_1-t_0|}$$

Gronwall

רק הגבלה!

וזו סתירה, קיבלנו ש $|x(t)|$ קטן מקבוע כלשהו לכל t
אבל הראנו ש $|x(t)|\to\infty$ כש $t\to\omega_+$ וזו סתירה.

דוגמא:

$\dot x=\underbrace{a(t)x+b(t)}_{f(t,x)}$ כאשר a,b רציפות בקטע (α,β) ולכן מתקיים

$$|f(t,x)|\le|a(t)||x|+|b(t)|$$

ולכן ממה שהוכחנו הרגע, כל פתרון למשד"ר יהיה אפשר להרחיב
לכל הקטע (α,β) [צריך רק לוודא שהקבועים בה חסומים]

תזכורת:

$\dot x=a(t)x$ משוואה לינארית הומוגנית

$\dot x=a(t)x+b(t)$ לינארית לא הומוגנית.

עבור משוואות הומוגניות אוסף הפתרונות שלה הוא מרחב וקטורי, חד-ממדי!

תזכורת לפתרון משוואות לינאריות:

$\dot x=a(t)x \longrightarrow \dot x-a(t)x=0$ ואז נעשה גורם
אינטגרציה או הפרדת משתנים:

$$e^{-\int a(t)dt}\dot x-a(t)xe^{-\int a(t)dt}=0$$

$$\downarrow$$

$$\left[xe^{-\int a(t)dt}\right]'=0$$

$$\downarrow$$

$$xe^{-\int a(t)dt}\equiv Const$$

$$\downarrow$$

$$x(t)=Ce^{\int a(t)dt}$$

אוסף כל הפתרונות למשוואה. ולכן המרחב נפרש ע"י וקטור יחיד, כי כל וקטור אחר הוא כפולה בקבוע

כדי למצוא הפתרונות למשוואה לא הומוגנית, למעשה מספיק
למצוא רק אחד מהם, שנקרא לו פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית
כי אם יש שני פתרונות שונים למשוואה הלא הומוגנית אז הם נבדלים בדיוק
בפתרון של המשוואה ההומוגנית בבירור... ולכן בעזרת פתרון פרטי
אפשר לייצר את כל שאר הפתרונות למשוואה הלא הומוגנית בתנאי
שאנחנו יודעים את הפתרונות למשוואה ההומוגנית. לכן

פתרון כללי $\rightarrow x(t)=\underbrace{x_0(t)}_{\text{פתרון פרטי}}+\underbrace{Ce^{\int a(t)dt}}_{\text{הפתרונות למשוואה ההומוגנית}}$

את הפתרון הפרטי צריך למצוא בדרך כלשהי...

13/3/14

הרצאה שיעור 4

איך מוצאים את הפתרון הפרטי? נשתמש בשיטת וריאציית המקדמים/קבועים.

כזכור פתרון כללי למשוואה ההומוגנית נראה $x(t) = Ce^{\int a(s)ds}$.

ננסה למצוא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית בצורה הבאה:

$$x_1(t) = C(t)e^{\int a(s)ds} \xrightarrow{\text{נגזור}} \dot{x}_1 = \dot{C}e^{\int a(t)dt} + Cae^{\int a(t)dt}$$

כלומר הקבוע משתנה... אחרת הפתרון הוא למשוואה ההומוגנית.

ונרצה שיתקיים

$$\dot{x}_1 = a(t)C(t)e^{\int a(t)} + b(t)$$

כדי שזה פתרון כללי למשוואה לא הומוגנית.

ולכן נקבל

$$C(t) = \int e^{-\int a(s)ds} \cdot b(t)dt \leftarrow \dot{C}(t) = e^{-\int a(s)ds} \cdot b(t)$$

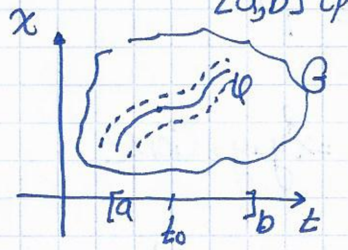
קיבלנו המקדם לפתרון.

שימוש נוסף לגו"ש האינטגרלי:

משפט תלות רציפה של פתרון בתנאי ההתחלה, כלומר נרצה שאם יהיה לנו סטיה קטנה במעטפה של תנאי ההתחלה אז הפתרון לא ישנה הרבה.

משפט:

נניח $\dot{x} = f(t,x)$! $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ פונ' רציפות בתחום G. נסמן $\varphi(t)$ פתרון בעל תנאי התחלה $\varphi(t_0) = x_0$! φ מוגדר על קומפקט $[a,b]$



אז לכל $\varepsilon > 0$ שמספיק קטן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x_0 - \hat{x}_0| < \delta$ אזי הפתרון למשוואה $\hat{\varphi}$ בעל תנאי התחלה $\hat{\varphi}(t_0) = \hat{x}_0$ אז:

(א) $\hat{\varphi}$ מוגדרת בכל $[a,b]$, כלומר לא מתפוצצת בתוך הקטע אם הסטיה שלנו קטנה מספיק.

(ב) לכל $t \in [a,b]$ מתקיים $|\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)| < \varepsilon$ כלומר לאורך כל הקטע $[a,b]$ הן קרובות ε, כלומר סטיה קטנה במעטפה התחילית לא מרחיקה את הפתרון ה"שגוי" לצורה שונה מהפתרון הנכון "האמיתי"

13/3/14

תרגול שבוע 4

תזכורת: ראינו את משפט קיום ויחידות למד"ר.

משוואות מדויקות:

נניח נתונה לנו משוואה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ שבה תבנית דיפרנציאלית מסדר ראשון.

אם מתקיים $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ אז נאמר שזו משוואה מדויקת.

לכן קיימת פונ' תחת שימור/פוטנציאל $F(x,y)$ כך ש F קבועה ע"פ פתרונות למד"ר

13/3/14

המשך שיעור 4

ומתקיים $\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$ (I) ; $\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$ (II). גם נמצא את F

נקבל ביטוי שקושר בין x ל-y וזה יהיה פתרון למד"ר.

איך נמצא את F? נבצע אינטגרציה ל-I לפי x ונקבל

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx+g(y)$$ ← הקבוע מהאינטגרציה

כעת נגזור לפי y ונקבל $Q=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial\int P(x,y)dx}{\partial y}+g'(y)$

ורק נחלץ את $g'(y)$ ונוכל לקבל את $g(y)$ ורק נחלץ את F ונקבל קשר בין x ל-y ונשיג פתרון למשוואה.

סימון:

$$DF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

↓

לכן אם F וזה אז

$$\underbrace{Pdx+Qdy}_{0}=DF$$

דוגמא: $\underbrace{2xy}_{P}\,dx+\underbrace{(1+x^2)}_{Q}\,dy=0$ אז מתקיים $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x$ לכן המשוואה מדויקת.

אז קיימת פונ' חוק שימור F המקיימת $\frac{\partial F}{\partial x}=2xy$ (I) ; $\frac{\partial F}{\partial y}=(1+x^2)$ (II)

לכן נקבל $F(x,y)=x^2y+g(y)$ מאינט' של (I)

לכן נגזור לפי y ונקבל $(1+x^2)\overset{II}{=}\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+g'(y)$

↓

$$g'(y)=1\longrightarrow g(y)=y+Const;\ \xrightarrow[\text{ונציב}]{\text{נקבל}}\ F(x,y)=x^2y+y+Const$$

לכן משום ש-F חוק שימור אז $y=\frac{Const}{1+x^2}$ פתרון למד"ר.

הערה: אם משוואה אינה מדויקת, תמיד ניתן להפוך אותה לכזו ע"י גורם אינטגרציה. זה משפט קיום, לא קונסטרוקטיבי. קיימת $\mu(x,y)$ כך ש המשוואה החדשה מדויקת ← $\mu Pdx+\mu Qdy=0$

כלומר $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ לכן $\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}$

וזו מד"ח על פני μ ובמקרה זה לא נפתור אותה...

היינו רוצים ש-μ תהיה פונ' של משתנה אחד כדי שנוכל לפתור אותה.

הנחה: נניח ש-μ תלויה אך ורק ב-x! לכן $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ והמד"ח שלנו הופכת למד"ר פשוטה

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mu}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=H$$ ← ביטוי שנתון

→ לכן צריך ש-H פונ' שתלויה אך ורק ב-x, וזה התנאי ל-μ

אם מתקיים ש-H תלויה אך ורק ב-x אז נבצע אינט' לפי x ונקבל → $\ln\mu=\int H$

לכן $\mu=e^{\int H}$

13/3/14

המשך תרגול 4

אם H אינה תלויה רק ב-x אז μ אינה תלויה רק ב-x בהכרח. כנ"ל אפשר לעשות עבור y, ולדרוש ש-μ פונ' של y בלבד. בנוסף ניתן לדרוש אולי ש-μ היא פונ' של z בלבד כאשר z איזשהי פונ' של x ו-y. יש לנו אפשרות לבחור z ולכן נצטרך למצוא הכוונה לגבי z נוספת.

תרגיל: $\underbrace{(3xy+y^2)}_{P}dx+\underbrace{(x^2+xy)}_{Q}dy=0$ לכן:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x+2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x+y$$

לכן זו לא משוואה מדויקת. נניח ש-μ גורם אינטגרציה שתלוי אך ורק לפי x לכן

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mu}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{x+y}{x(x+y)}=\frac{1}{x}$$

לכן μ אכן תלוי אך ורק ב-x, מכאן $\ln(\mu)=\ln|x|+c$ לכן

נבחר פונ' זהה $x=\mu$. אם נכפיל המשוואה ב-x ונקבל משוואה מדויקת

$$(3x^2y+y^2x)dx+(x^3+x^2y)dy=0$$

לכן קיימת F קדומה כך ש $\frac{\partial F}{\partial x}=\mu P$; $\frac{\partial F}{\partial y}=\mu Q$ אז נפתור כמו מקודם

קודם בעזרת אינטגרציה

$$F=x^3y+\frac{y^2x^2}{2}+g(y)\ \xrightarrow[\text{לפי } y]{\text{גוזרים}}\ x^3+x^2y=x^3+x^2y+g'(y)\ \rightarrow\ g'(y)=0$$

לכן $y\equiv Const$ לכן: $C_2=F=x^3y+\frac{y^2x^2}{2}+C_1$ פתרון שמקשר בין x ו-y.

תרגיל: האם הגרפים של הפתרונות למשוואה יכולים להחתך במישור x,y?

א) $y'=x+y^2$

נשים לב ש $f(x,y)=x+y^2$ פונ' גזירה ברציפות, לכן $y'=f$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות. נניח ש $y(x_0)=y_0$ תנאי התחלה כלשהו, כלומר הנקודה (x_0,y_0) במישור xy. בכל נקודה כזו יש פתרון יחיד שעובר בנקודה זו והוא היחיד שיעבור בנקודה זו, לכן לשום נקודה לא יכול להיות שיש שני פתרונות שעוברים בה, כי אחרת שניהם מקיימים אותו תנאי התחלה בסתירה למשפט היחידות בסביבת תנאי ההתחלה [ובקצוות הסביבה אפשר להרחיב]

תרגיל: נניח כי $y'=f(x,y)$ מקיימת את תנאי משפט קיום ויחידות לכל ערך של x ו-y!

תנה כי $y(x)=x+2e^{-x^2}$; $y(x)=x$ הם שני פתרונות למשוואה.

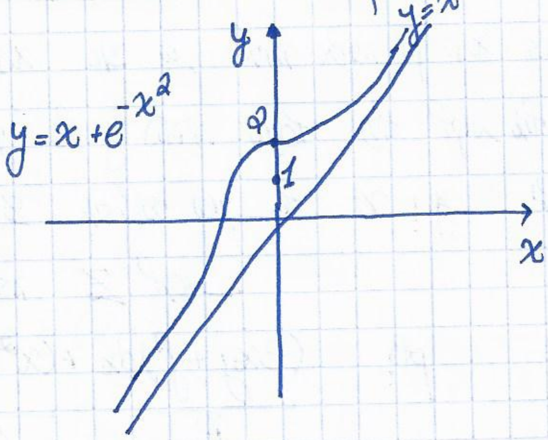
א) מה ניתן להגיד על התנהגות הפתרון המקיים $y(0)=1$? ב) איך מתנהג פתרון זה ב-$\pm\infty$?

13/3/14

המשך תרגול 4

פתרון:

נשים לב ש $0<y(0)<2$ ולכן מהמשפט קיום ויחידות נקבל כי $y(x)$ כלוא בין שני הפתרונות שלי. בפרט יש לו אסימפטוטה משופעת $y=x$ ב $\pm\infty$.



תרגיל:

פתרו את $y'=\sqrt[3]{y}$; $y(0)=0$. כמה פתרונות יש? כיצד זה מתפקד עם קיום ויחידות?

$y\equiv 0$ פתרון שלה. לאחר הפרדה נקבל $y=(\frac{2}{3}x+C_1)^{3/2}$ (ותנאי ההתחלה נקבל) $C_1=0$ ולכן פתרון נוסף זה $y=(\frac{2}{3}x)^{3/2}$! ולכן הפתרון לא יחיד.

וזה בסדר כי $\sqrt[3]{y}$ לא ליפשיצית בסביבת אפס...

$$\frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|}=\frac{|\sqrt[3]{y_1}-\sqrt[3]{y_2}|}{|y_1-y_2|}=\frac{1}{|y_1^{2/3}+(y_1y_2)^{1/3}+y_2^{2/3}|}\xrightarrow{y_1,y_2\to 0}\infty$$