5/3/14

שיעור שמונה 3

~~[illegible]~~

יש לנו בעיית קושי

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ומניחים ש f רציפה בתחום $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

ובנוסף $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת ורציפה ב G

הרעיון שקיימת סביבה מסוימת קטנה של $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ אם נמתח כל הפונ' הרציפות בשלבים סביב (t_0,x_0) ההתאמה $T: \varphi \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds$ היא אנטיפונטנית מכווצת מתקיים במרחב המטרי השלם $X = C[\text{[illegible]}]$. אם קיימת נקודת שבת שתהיה פתרון למפ"ד שלנו מהימה פתרון לשוואה האינטגרלית, יצא מקיימת גם את המשוואה, כי כל פונ' במרחב המטרי שלנו מקיימת אותה. נקודת השבת של T הינו פונ' φ שצורה הרציונלית שמקיימת את המפ"ד.

$$\varphi = x_0 + \int_{t_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds$$

אין צורך ברציונלי מהמשפט הנקודת שבת

אין קיימת סביבה שבה יש פתרון, הוכחנו קיום.

הערה: נקודת השבת בעצם הינו מתקבלת כגבול של סדרת קירובי פיקרד. נתעניין כמה טוב הקירוב שלנו.

במשפט על נקודת השבת קיבלנו ההערכה לקצב הקירוב:

$$d(x_n, x_*) \le \frac{\alpha^n d(x_0,x_1)}{1-\alpha} \quad \left[\alpha \text{ צר מקסימום הכנון } \varphi\right]$$

אין הקירוב מתקבל אקספוננציאלי

במקרה שלנו

$$\frac{\alpha^n \cdot d(\varphi_1,\varphi_0)}{1-\alpha} \ge d(\varphi_n(t),\varphi(t)) \overset{\max}{=} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|$$

הפרדן הגדול מקסימום

הפרדן הגדול

$\alpha = \frac{a}{L}$ נקבע

(-) נניח שהוכחנו את היחידות של הפתרון, לומר שגם $f \in C(G)$! $\frac{\partial f}{\partial x}$ גם רציפה ב G, ומתקיים $\varphi(t)$ מוגדרת על I_1 ! $\psi(t)$ מוגדרת על I_2 ושתיהן פתרונות של בעיית קושי שלנו. אז נניח להראות שגם פונ' $I_1 \cap I_2 = (\alpha,\beta)$ הן מצומצמות.

נסמן $Z \subseteq (\alpha,\beta)$ את הקבוצה של הקטע (α,β) שבה φ ! ψ מצומצמים

$Z = \{t \in (\alpha,\beta) \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$. $t_0 \in Z$ אין $Z \neq \emptyset$.

לומר $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$! יצא מקיימים המפ"ד

בנוסף Z קבוצה סגורה על (α,β) לומר אם φ ! ψ מצומצמים בנקודה הן מצומצמים בסביבה של הנקודה. כי אחרי נקודה כזו אפשר לסמוך עליה בנקודת השבת של בעיית הנשי ולבנות קירובי פיקרד על סביבה קטנה מספיק לקבל שפתרון המפ"ד יהיה אמיתי הוא נקודת שבת של הבנקומפרמציה המכווצת של פיקרד, ונקודת שבת כזו יחידה, אין ע"פ השלבן של פיקרד יש רציפה.

אין Z סגורה

5/3/14

המשך שיעור 3

המשך הוכחה: Z סביבה סגורה סביב (α,β), כלומר לכל סדרה $\{z_n\}\subseteq Z$: $z_n\to\tilde{z}$ אזי $\tilde{z}\in Z$, וכך בדיוק מקבל ש φ ו ψ זהים. לכל $z_n\in Z$ יש $\varphi(z_n)=\psi(z_n)$ ולכן מהזהות $\varphi(\tilde{z})=\psi(\tilde{z})$ יש $\tilde{z}\in Z$. [מהיחידות הגבולית]

יש Z סגורה, סביבה ולא ריקה, יש $z=(\alpha,\beta)$ יש הרחבה על פני כל ההגדרה

כי הקטע השני

דוגמה: כאלון פוטאנציאל $\dot{x}=x^{2/3}$ שבו אין יחידות, יש הפרשה $\frac{\partial f}{\partial x}\in C(G)$ חיובי

[לא אפשר לפרוש קצת פחות, אבל בכל אופן לפרוש עליו]

הוכחה: הנחת (α,β) ! כקטע פתוח, כי אם הוא סגור ניתן בנקודות הקצה לנחיים אחרת בנקודות הגבול, ומהמשפט נובע שאפשר להרחיב לסביבה פתוחה של הקצה שבה הפונקציה עדיין הפרמטר שמגיע עד הפרמטר עדיין. אבל הבעיה הוא כמה אפשר להרחיב?

הרחבה הפרמטר:

תהי מפ"ד $\dot{x}=f(t,x)$ כך ש $f\in C(G)$! $\frac{\partial f}{\partial x}\in C(G)$

! $\varphi(t)\in I_1$! $\psi(t)\in I_2$. נאמר ש ψ מרחיב את φ אם $I_1\subseteq I_2$ ובנוסף $\psi\equiv\varphi$ על I_1.

שיפוט פתרונות

נתעניין בפתרון המקסימלי, כך שלא ניתן להרחיב. נאמר פתרון $\varphi(t)$ יקרא פתרון בעל תחום הגדרה מקסימלי אם לא קיימת לו הרחבה, יש פתרון עם תחום סגור אבל לא יכול להיות מקסימלי

⊖ נניח $\varphi(t)$ פתרון מקסימלי והקצוות של תחום הם (ω_-,ω_+)

מה קורה כאשר $t\to\omega_+$ או $t\to\omega_-$?

משפט הרחבה עם אחת הקומפקט

נתון תחום G ופונ' $f\in C(G)$! $\frac{\partial f}{\partial x}\in C$ ונתונה משוואה $\dot{x}=f(t,x)$

! $\varphi(t)$ על התחום (ω_-,ω_+) שהוא פתרון מקסימלי. וגם $K\subseteq G$ קומפקט ב G.

וכמו כן $\varphi(t_0)=x_0$ כך ש $(x_0,t_0)\in K$

אז קיימת נקודה t_1 שהיא נקודת הסגר הקומפקט

ונקודה $t_1\le t_2<\omega_+$ שהיא נקודת סגירה של המפה K

כלומר לכל ε ! נקודה אחרת לקומפקט T_1 כך $T_1+\varepsilon$!

[הוכחה בבוא המשך]

5/3/14

הרצאה שיעור 3

טענה: אם $\dot{x}=f(t,x)$! $G=\{(t,x)\mid a<t<b,\ x\in\mathbb{R}\}$ לאחר כל תנאי כלשהו:

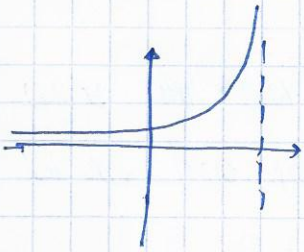
אזי $\varphi(t)$ פתרון מקסימלי עם $(a,b)\supseteq(\omega_-,\omega_+)$ אזי יש שני אפשרויות:

(א) $b=\omega_+$, לאחר יש פתרון עד לקצה.

(ב) $b<\omega_+$ אזי $\lim_{t\to\omega_+}|\varphi(t)|=\infty$, לאחר הפתרון מתפוצץ בקצה.

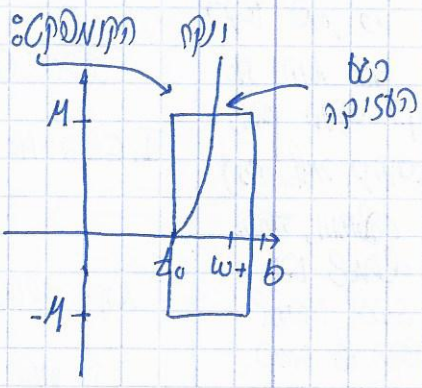
לאחר מ"מ ניתן להמשיך בפתרון שלנו המרחק, אלא אם הוא מתפוצץ בקצה!

לדוגמא: $\dot{x}=x^2$ אזי הפתרון המקסימלי



הוכחת הטענה:

אם $b>\omega_+$ אזי נתון M שקיים בגבולות



מהמשפט מישהו נעצור את הקומפקט, אבל לא נוכל לעצור אותו לעבור ω_+ כי זה המקסימלי! לכן הייתה לנו מהקומפקט בכיוון הערך המוחלט, והפתרון לא מגדיר יש לנו הקומפקט בסתירה.

ניתן לבחור M, לכן הגבול הוא אינסוף.

⊖ עכשיו נלמד הסברה מהמשוואות לחצור לדיפרנציאלית:

מה המשמעות של $f(x)\,dx+g(y)\,dy=0$? היינו רוצים לחלק ב dy ! לקבל משוואה עם $\frac{dx}{dy}$ וכו'.

הגדרה: מלבד הקיום והיחידות של הפתרון לשוואה סדר ראשון אקלי גם לעניין של משוואה! לא רק משוואה אחת.

מערכת משוואות: יש n $x_1,\dots,x_n$, לכן n פונ' נעלמות. המערכת היא הקבוצה של n משוואות מהצורה $\dot{x}_i=f_i(x_1,\dots,x_n,t)$. רצה לחפש פתרון לעניין שבה נקבוצה $(x_1,\dots,x_n)$ של פונ' שמגדרים המערכת, לאחר לכל i מתקיים $\dot{x}_i(t)=f_i(x_1,\dots,x_n,t)$.

או באופן שקול נסמן $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(t,\vec{x}(t))$

גזירה קרטזית

מהו תנאי הלא לעניין?

אם $G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ פתוח, הפונ' שלו אינו מוגדרים, לאחר $\vec{f}$ מוגדרת. נניח בנוסף $f_i\in C(G)$! אם $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(G)$ לכל i,j. אזי נקודת הלא הוא נקודה $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$

ומתקיים הנוסף הוא לעניין $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ כך ש $x(t_0)=(x_1(t_0),\dots,x_n(t_0))=x_0$

5/3/14

המשך שיעור 3

משפט: תנאי הקיום והיחידות של פתרון אומר שלכל מערכת משוואות $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$

! $f_i \in C^1(G)$! $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(G)$ ונקבל $G \ni (t_0, \vec{x_0})$ אם קיים $a > 0$

! פונ' $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ שמהווה פתרון למערכת המשוואות הדיפרנציאליות

! אם $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x_0}$ לומר $\varphi_i(\vec{x_0}) = (x_0)_i$ לכל $1 \le i \le n$

בנוסף אם יש שני פתרונות φ ! ψ של בעיית קושי על I_1 ! I_2 בהאמה

אזי $\varphi \equiv \psi$ על החיתוך של $I_1 \cap I_2$

מוסיפים כמו לא קרה אמיתי (רק בהמשך)

מקרה פרטי חשוב:

מערכת משוואות אוטונומית: מערכת $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$ נקראת אוטונומית אם f_i פונ' של x בלבד, לומר לא תלוי ב t, כאשר $f = (f_1, \dots, f_n)$

הגדרה: נקודה $\vec{x}_* \in \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת שווי אם $f_i(\vec{x}_*) = 0$ לכל i.

אם $\vec{x}_*$ נקודת שווי אזי $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_*$ פתרון למערכת, כי הנגזרת של פונ' קבועה הינו אפס.

אם $\vec{x}(t)$ פתרון למערכת אוטונומית אזי $\vec{y}(t) = \vec{x}(t+c)$ כאשר c קבוע כלשהו, הינו גם פתרון.

ואכן מתקיים

$$\left.\frac{\partial \vec{y}}{\partial t}\right|_t = \left.\frac{\partial(\vec{x}(t+c))}{\partial t}\right|_t = \dot{\vec{x}}(t+c)\cdot 1 = f(\vec{x}(t+c)) = f(\vec{y}(t))$$

לא שלם

כי x פתרון, בכל מקום!

בקצרה.

היה בשיעורי בית

במשוואות אוטונומיות עבור פתרון אזי אפשר לקבל אינסוף פתרונות ע"י הזזה של הפתרון.

מקרה פרטי שמעניין בעיקר משמעות:

"לבטל" את dt

מרשים כבר לדבר על אוטונומי

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

מערכת משוואות אוטונומית

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = P(x,y) \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = Q(x,y) \end{cases}$$

היינו רוצים לחלק המשוואות לקבל

לעבר בה מעניין? [נמנע לעשות הפרדת המשתנים]

תהי מסלול γ, $\gamma = (x, y)$ לומר $\gamma(t) = (x(t), y(t))$! $\nabla\gamma = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t})$

אם γ רגולרי בנקודה t_0, אז נניח כי $\dot{x}(t_0) > 0$

אז x מונוטונית עולה, לכן אפשר לחלף את t בפונ' של x

כי מהיות מונוטונית הינו חח"ע ואז נקבל

$$y(t) = y(t(x))$$

לכן בסביבת t_0 המסלול γ הינו הגרף של הפונ' $y(x)$

דוגמה: מסלול הינו מסלול אם הרדיוס שלה שונה מאפס, לומר שונה מווקטור האפס

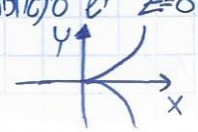
מאפשר הפרדת המשתנים.

פונ' מסלול לא רגולרי

$\gamma = (t^2, t^3)$

אזי $\nabla\gamma = (2t, 3t^2)$

לכן ב $t=0$ יש סינגולרי!



5/3/14

המשך שיעור 3

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$ כלל השרשרת ← $y(x) = y(t(x))$ כאשר $y(x)$. (נסמן את)

אבל $t(x)$ הוא ההופכי של $x(t)$. לכן $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial t}}$ מתקיים 1.

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}\ !}$$

אפשר "לצמצם" את הd מאחר הפונ' הפנימית.

⊖ נתבונן במערכת שני $\begin{cases} \dot{y} = P(x,y) \\ \dot{x} = Q(x,y) \end{cases}$ נניח ש $(x(t), y(t))$ פתרון למערכת

אם זה פתרון נקבל שגם גם פתרון

פשוט. אחרת זה מעלה בעיה

לכן אפשר לעשות כלל לינארי ונקבל y כפונ' של x או x כפונ' של y

כלומר בגלל מתח לא מאפס. ע"ז נקבל $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

6/3/14

המשך שיעור 3

הגדרה:

המשוואה של $Pdx + Qdy = 0$ זה שאם $Q \neq 0$ אם נקבל

$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ אם $P \neq 0$ נחלק הפוך $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$

ואת שניהם מאפסים זה נקרא סימטרית.

הגדרה: כפי שראינו אמוץ $\begin{cases} \dot{y} = -P(x,y) & (1) \\ \dot{x} = +Q(x,y) \end{cases}$ מגיע למשוואה $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ (2) ס"ד

$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$ מלבד הפונ' הסתומה. אפשר גם בכיוון ההפוך, לעבור למשוואה

אפשר להתאים מערכת $\begin{cases} \dot{y} = -P(x,y) \\ \dot{x} = Q(x,y) \end{cases}$ על פני משתנה t.

הגדרה: פונ' $F(x,y)$ נקראת חוק שימור עבור (1) אם לכל פתרון $(x(t), y(t))$, F שמורה ערכים קבועים, לומר $F(x(t), y(t)) = \text{const}$.

טענה: אם F הינו חוק שימור אזי $\frac{\partial}{\partial t}(F(x(t), y(t))) = 0$ בגלל כי זה קבוע

כלל השרשרת

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

לכן אם מקיים ש x,y אם פתרון למערכת אז

$\frac{\partial F}{\partial x} Q(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot P(x,y) = 0$ ← $\dot{y} = P(x,y)$; $\dot{x} = Q(x,y)$

6/3/14

המשך שיעור 3

אם נמצא חוק שימור F לשדה לינארי (1) אז כל פתרון שייך לקו גובה כלשהו של פונ' F.

לחילופין, קווי גובה של F יהיו פתרון למערכת P, Q, וזו דרך נוספת לפתרון אלא בעזרת האינטגרציה.

דוגמא:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

אז לפי מה שראינו את הפונ' המתאימה נקבל $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$

ואת זה אפשר לפתור מהפרדת משתנים

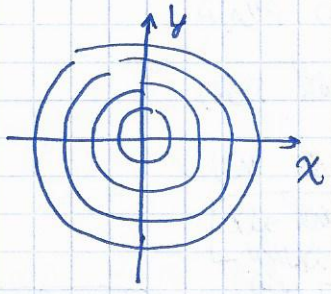
$$\int y\,dy = -\int x\,dx \longrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לכן נגדיר חוק שימור F לפי

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

ואכן נוודא שזה חוק שימור:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot(-y) + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot(x) = xy + xy \equiv 0$$



לכן כאן חוק שימור נגדיר קווי גובה של F

לכן נוח לתאר את y כפונקציה של x

ואז לחזיב המשוואה במקומות! לשם, לומר F נשמר

לנו קשר בין x לy ונשאר לנו לתאר מה z!

משוואות מילוניות:

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(x,y) \\ \dot{y} = -P(x,y) \end{cases}$$

מערכת משוואות כזו תקרא מילונית אם קיים פונ' H כך $P = \frac{\partial H}{\partial x}$ ו $Q = \frac{\partial H}{\partial y}$!

(-) אם יש לנו מערכת משוואות מילוניות אז יש חוק שימור ברור נקרא לתאר. פונ' H מצמצם הוא חוק שימור באופן ברור כי

$$H(x(t),y(t)) \overset{?}{\equiv} Const$$

נגזור

$$\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = PQ - QP = 0$$

לכן בגלל H חוק שימור. לכן למשוואה מילונית יש חוק שימור פשוט, הוא H.

לכן לכל פתרון (x,y) מתקיים $H(x,y) \equiv Const$

הערה:

התבנית $Pdx + Qdy = 0$ תקרא מילונית אם $Q = \frac{\partial H}{\partial x}$, $P = \frac{\partial H}{\partial y}$

ואז המשוואה הזו $\underbrace{\frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy}_{dH} = 0$ נגזר להיות dH

6/3/14

המשך שיעור 3

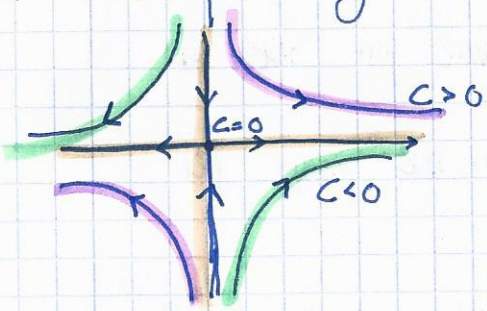
⊖ משוואה מפוקחת כפי מקרה נפוץ, אבל בהתנאי משוואה מהצורה $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ (2) שאינה בהכרח מפוקחת אפשר לכפל בפונ' כלשהי במונה ובמכנה כדי שהמשוואה תהיה מפוקחת.

דוגמא: (1) $\begin{cases} \dot{y} = -y \\ \dot{x} = x \end{cases}$ $\longleftrightarrow$ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-y}{x}$ (2) אז המבנה הדיפרנציאלי הוא

$0 = xdy - ydx$

אינטואיציה...

אין נתון $H = xy$ להיות חוק השימור שלנו. ואכן כבר חוק שימור! אם $H \equiv const$. אם $xy = const$ אם $y = \frac{const}{x}$ פתרון למשוואה (2).



המבנים למשוואה נראים כמו קווי גובה של הפונקציה $xy = const$ במרחב $\mathbb{R}^2$ מאחר כל פתרון נע על מרחב קו גובה.

בנתיים רק מצאנו קשר בין x ל y. אשאיר גרפה לשמו.

אז נקבלו תמונת הפאזה של המערכת שלנו.

נפתר את המערכת ונקבל $\begin{cases} y(t) = y_0 e^{-t} \\ x(t) = x_0 e^{t} \end{cases}$ → ואכן הכל שלם קבועה.

אבל לפני הנפתרים כי כל משוואה הינו בינו המשוואה השני

⊖ אך נפתח את משוואה מפוקחת:

אבחנה: אם משוואה הינו מפוקחת אז בדיק לפתקיים $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

כאשר המשוואה הינו $Pdx + Qdy = 0$. ונבר ברור כי

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$

ויש שוויון בין לנגזרות קפמ שני x ואז y ולהפך.

מה לגבי הכיוון הפוך?

משפט: אם $G \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום פשוט קשר! $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(G)$

ובנוסף $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ אז קיימת H שמקיימת

$\frac{\partial H}{\partial x} = P$; $\frac{\partial H}{\partial y} = Q$

כלומר קיימת H שבפרק ית המשוואה שמפוקחת

משפט מתקיים

לפעמים לא נוכל לפתור את המערכת, אבל בעצם חוק שימור לא, נפל יום ביום

6/3/14

המשך שיעור 3

דוגמא: [נקודות] $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$. הדיפרנציאל של הפונקציה הוא

$$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \; ; \; P = \frac{-y}{x^2+y^2} ; \; Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

מה זה הדיפרנציאל?

$\left(\begin{matrix} \text{מכפלת} \\ \text{הנגזרת} \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix}\right)$

ולכן הדוגמא הזו מקיימת תנאי, אבל מתוך הדיפרנציאל שלה לא

פשוט קשה, אין את $(0,0)$.

⊖ כדור המצבה שלו לעצמו מן שלוח לכפל מוגה ומבנה ולקבל משוואה מדויקת.

זה נקרא גורם אינטגרציה

משם אומר שמגיע קיים מן שיבוא לו שמשוואה יש חוק שימוש.

6/3/14

תרגיל שעה 3

⊖ כאן בטוח שקרובי פיקרד הולכים ומתכנסים במ"ש לפתרון של המפ"ר.

משוואות הומוגניות:

מפ"ר $\dot{y} = f(x,y)$ תהיה הומוגנית אם ניתן לכתוב אותה בצורה $\dot{y} = g(\frac{y}{x})$

עבור g, כלשהי.

הפונקציה שמקיימת תנאי שלפי תהיה הומוגנית. או באופן שקול שלכל $t \in \mathbb{R}$ קיים

$s \in \mathbb{R}$ כך ש $f(tx,ty) = t^s f(x,y)$. ואומרים כאן תהיה s -הומוגנית.

לומר עדיף הפונקציה תלוי רק ביחס בין x ל y! ולכן ניתן לכתוב אותה הפונקציה של $\frac{x}{y}$.

דוגמא:

$$f(tx,ty) = t^3(f(x,y)) \leftarrow f(x,y) = xy^2 + 15y^3 + x^3 + x^2y$$

או באופן כלל כל פולינום שכל המונומים מאותו הסדר יהיה הומוגני מסדר המונומים.

דוגמא: $f(x,y) = \frac{x^2+xy}{x+y}$ אז $f(tx,ty) = tf(x,y)$. או באופן כלל

כל פונ' רציונלית רק שסדר כל המונומים במונה שווה ומקל במכנה.

⊖ כדי לפתור מפ"ר הומוגנית נצטרך להכניס $z = \frac{y}{x}$ לומר $y = zx$ ונגזור.

נקבל $\dot{y} = \dot{z}x + z$, ומהמפ"ר ההומוגנית $\dot{y} = g(\frac{x}{y})$ $\leftarrow$

$\dot{z}x + z = g(z) \leftarrow \frac{\dot{z}}{f(z) - z} = \frac{1}{x}$ ונפתור המפ"ר.

6/3/14

המשך תרגול 3

תרגיל: $xy\dot{y}-(x^2+y^2)=0 \xrightarrow{(xy\neq 0)} \dot{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

בנוסף בנקודה בנקודה $xy=0$ ונבדוק בנקודה $y=0$ אבל $y=0 \leftarrow x=0$ כפי שלא יכול פתרון. ונקבל נקודה בודדת ולכן לא פתרון לא פתרון.

$\frac{x^2+y^2}{xy}$ זו פונ' הומוגנית.

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}=g(\frac{y}{x})$$

$\boxed{\text{כפלתי מונה ומכנה ב } \frac{1}{x^2}}$

אז הצלחנו לחלק הפונ' כפונ' של המנה.

נעשה החלפה $z=\frac{y}{x}$.

מקיים $y'=g(z) \leftarrow y'=\frac{1+z^2}{z}$ אבל מצד שני

$y'=\dot{z}x+z$; לכן $\cancel{z}+\dot{z}x=\frac{1}{z}+\cancel{z} \leftarrow \dot{z}x=\frac{1}{z}$

לכן $z\dot{z}=\frac{1}{x}$ מאינטגרציה לפי x נקבל $\frac{z^2}{2}=\ln|x|+Const$

לכן $z^2=2\ln|x|+const$ ולכן לסיום $\frac{y^2}{x^2}=2\ln|x|+Const$

$$y=\pm\sqrt{2x^2\ln|x|+x^2Const}$$

⊖ שיטת הקירוב לפתרונות למשוואות שימושית מאוד למציאות פתרון.

שיטת פיקרד:

בהתחם בעיית קושי $\begin{cases}\dot{y}=f(x,y)\\ y(t_0)=x_0\end{cases}$, הבעיה שקולה לאינטגרל

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{y}(s)ds$$

ונקבל בדר מינימום לינארי.

לכן $y(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds$ כי y מק"מ המש'.

אז נגדיר קירוב פיקרד $\varphi_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_n(s))ds$

כאשר $\varphi_0(s)\equiv x_0$.

ראינו $\varphi_n \xrightarrow{u} \varphi$ כאשר φ פתרון למש"ר.

תרגיל: מצאו קירוב פיקרד עד סדר 2 עבור $\dot{y}=y+e^{y-1}$; $y(0)=1$.

פתרון:

$\varphi_0(t)\equiv 1$; $\varphi_1(t)=1+\int_0^t f(s,1)ds \leftarrow \varphi_1(t)=1+\int_0^t 2ds$

לכן $\varphi_1(t)=1+2t$.

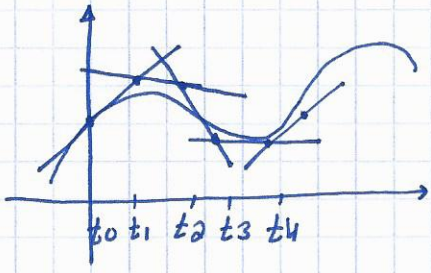
לכן $\varphi_2(t)=1+\int_0^t f(s,1+2s)=1+\int_0^t 1+2s+e^{2s}ds=1+t+t^2+\frac{e^{2t}}{2}-\frac{1}{2}$

6/3/14

הרצאה מס' 3

שיטת אוילר: נתונה בעיית קושי
$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$
ונניח שמתקיים משפט הקיום והיחידות של הפתרון.

נסמן h את צעד האינטגרציה. נבנה את הפתרון שלו להיות לינארי למקטעין
נאפיין את y שלו כך: $y(t_0)=x_0$. $y_0 + hf(t_0,y_0) = y(t_0+h)=y(t_1)$
כלומר כל פעם נציב h ומעדכן הפתרון לפי השיפוע בנקודה הקודמת.



$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$$

$t_i = t_{i-1}+h$

כאמצע שלא ל h קטן יותר הקירוב טוב יותר.

את הפתרון נגדיר להיות לינארי בכל $[t_k, t_{k+1}]$
עבור חלוקה שרירותית בקטע $[a,b]$ כאשר $h=\frac{b-a}{n}$ ויש התכנסות המ"ש לפתרון
כאשר $n \to \infty$.

תזכורת: משפט קיום ויחידות. עבור f רציפה בסביבת (x_0,y_0) ובעיית הגדר
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
אז קיים פתרון לבעיית קושי. אם בנוסף f ליפשיצית בתחום
y בסביבת אותו התחום, אז הפתרון יחיד. [מה כן עדיפה בהרצאה? תרגיל ליפשיצית]